Notes cours
≪Equations différentielles et calcul différentiel≫

17 novembre 2023

Remarques importantes

Ce document est basé sur des **notes de cours** du semestre d'automne 2021 prises par Cécile Touzet dans le cours de Bernhard Haak. Aucune garantie d'être correct, complet, etc. Prière de communiquer toute sorte de faute (grammaire, orthographe, maths) ou passage incompréhensible à

`bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr`

Il est important de souligner que la lecture d'un document quelconque ne peut pas remplacer le travail personnel. Une bonne façon de travailler le cours consiste à rédiger pour chaque théorème (au moins) la stratégie de la preuve en quelques phrases en prose, puis d'être capable de re-transformer ce résumé à nouveau en preuve rigoureuse.

Le cours repose sur des connaissances de fonctions de plusieurs variables, et la topologie de $\mathbb{R}^n$ qui sont détaillés dans le polycopié de la L2, disponible sur la page web

`https://www.math.u-bordeaux.fr/~bhaak/enseignement/`

Ne pas hésiter à le consulter ! Ensuite, la lectrice ou le lecteur a le choix entre 3 "niveaux de lecture" pour ce cours :

a) (niveau suffisant) Remplacer des "espace vectoriels normés" par $\mathbb{R}^n$.
b) (niveau intermédiaire) Comprendre la théorie pour des e.v.n. de dim. finie.
c) (niveau avancé) Étudier les notions dans un e.v.n de dimension quelconque, en faisant attention où (et pourquoi) parfois la dimension finie est nécessaire.

Le niveau "suffisant" permettra de passer l'examen avec une note d'au moins 15/20, le niveau "intermédiaire" permettra de passer l'examen avec 20/20. Le niveau "avancé" est proposé pour éviter l'ennui de la répétition à des étudiants qui ont bien intégré le cours de L2.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons
Attribution "creative commons licence CC-BY-SA 4.0"
Vous trouvez les détails de ces règles sur `https://creativecommons.org`

Première partie

Calcul différentiel

1. Rappels et outils

1.1. Normes, complétude

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Une **norme** sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
(positivité) $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. Si $N(x) = 0$ alors $x = 0$
(homogénéité) $\forall \lambda \in K \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
(inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E : \qquad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Une norme satisfait alors automatiquement l'inégalité triangulaire inférieure (preuve voir polycopié “Fonctions de plusieurs variables” de L2)

$$N(x-y) \geq |N(x) - N(y)|.$$

Définition 1.2. distance entre deux vecteurs x et y de E : $\text{dist}(x,y) = N(x-y)$

Définition 1.3. Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. (espace vectoriel normé) et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. La suite $(x_n)_n$ est **convergente** vers une limite $\ell \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \qquad \forall n \geq N \quad \|x_n - \ell\| < \varepsilon$$

Définition 1.4. (x_n) est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \quad \forall n, m \geq M \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Une suite convergente est de Cauchy. La simple preuve est à savoir absolument.

La réciproque est fausse en général. Pour un premier contre-exemple on regardera en dimension 1 un espace métrique *(qui n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) puis, plus tard, un exemple de fonctions continues avec une norme non-complète – mais $C([a,b])$ est de dimension infinie.*

Exemple 1.5. Soit (x_n) la suite définie par les ”n premiers chiffres” de $\sqrt{2}$: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{14}{10}$ $x_3 = \frac{141}{100}$, $x_4 = \frac{1414}{1000}$, ...
Cette suite est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, et $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$, dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: la suite ne converge donc pas **dans** $(\mathbb{Q}, |.|)$!

Définition 1.6. On dit que $(E, \|.\|)$ est **complet** si toute suite de Cauchy converge.

Le point important de la complétude est qu'il ne faut pas connaître un “candidat” ℓ pour limite pour pouvoir montrer la convergence : on démontre la propriété de Cauchy à la place ! En revanche, on saura que (x_n) converge, mais on n'aura toujours pas la limite “en mains”.

Exemple 1.7.

1. $\mathbb{R}$ est complet (par construction).
2. $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est complet. Question : pourquoi n'a-t-on pas spécifié la norme ? ?

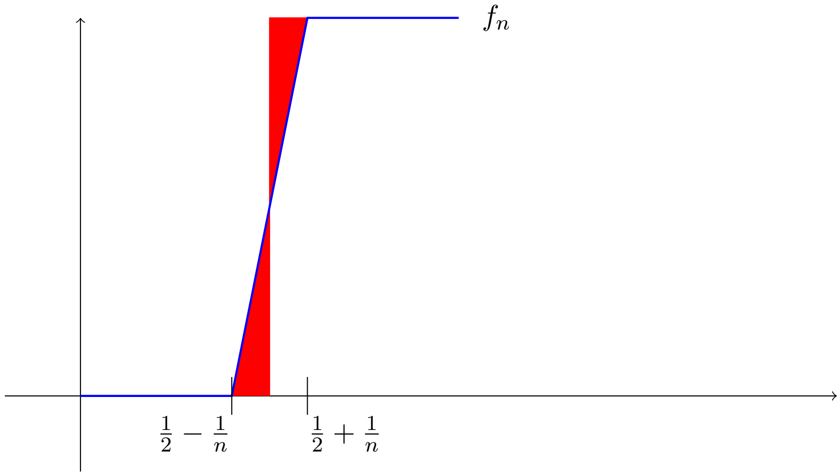
   Réponse : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, en effet si $\|.\|$ et $|||.|||$ sont deux normes, il existe A , $B \in \mathbb{R}$ tels que $A.\|x\| \leq |||x||| \leq B.\|x\|$. Convergence et Cauchy pour une norme entraîne donc la même propriété pour toute autre norme.

   Démonstration. On fixe la norme $\|.\|_\infty$. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ et $\pi_k : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x_k \end{cases}$ la projection de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sur sa k-ième coordonnée. $|\pi_k(x_n) - \pi_k(x_m)| = |\pi_k(x_n - x_m)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$. Ce qui montre que $(\pi_k(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy pour chaque k, donc convergente dans $\mathbb{R}$ vers ℓ_k : $\pi_k(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_k$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots, \ell_n)$ Ce ℓ est le "candidat" pour la limite. Il faut encore montrer la convergence !

   Soit $\varepsilon > 0$ et M comme dans la définition 1.4. Alors

   $$\|\ell - x_n\|_\infty = \|(\lim_{m\to+\infty} x_m) - x_n\|_\infty = \lim_{m\to+\infty} \|x_m - x_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

   pour tout $n \geq M$. Ce qui montre que (x_n) converge vers ℓ dans $\mathbb{R}^n$. $\square$
3. Par conséquent, tous les e.v.n. de dimension finie sont complets !
4. $E = \mathcal{C}([a, b])$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|,\ a \leq t \leq b\}$ est complet. Preuve en TD ! !
5. $E = \mathcal{C}([a, b])$ muni de la norme "moyenne" $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$ n'est pas complet, en effet : Prenons le cas $[a, b] = [0, 1]$. Soit f_n affine par morceaux tel que $f_n(x) = 0$ sur $[0, 1/2 - 1/n]$ et $f_n(x) = 1$ sur $[1/2 + 1/n, 1]$. Alors (f_n) converge en norme moyenne vers la fonction $f \overset{\text{def.}}{:=} \mathbb{1}_{[1/2,1]}$: en effet $\|f_n - f\|_1 = 1/n$, car c'est la surface des deux triangles rouges :



Par conséquent, c'est aussi une suite de Cauchy pour la norme moyenne. Par contre, la limite $\mathbb{1}_{[1/2,1]}$ est discontinue — donc (f_n) ne converge pas, car **la seule limite possible n'est pas dans le bon espace**. *C'est un "trou", une fonction qui manque. En effet, si on "complète" les fonctions continues par rapport à la norme moyenne (intégrale au sens de Lebesgue), on obtient un espace plus large, appelé* $L^1([0,1])$. *Ceci sera discuté dans le cours intégration ....* Un autre exemple du même type (présenté en cours) est la suite (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ et $f_n(x) = 1$ sur $[1,2]$ qui converge en moyenne vers $\mathbb{1}_{[1,2]}$ – une fonction discontinue sur $[0,2]$! !

Définition 1.8. Soit E un e.v.n. On dit que la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ *converge absolument* dans E si la série $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ converge (absolument) dans $\mathbb{R}$.

Il serait plus logique de dire "normalement" convergent, mais l'expression "absolument" s'est établi en analogie de séries (numériques) où abs. conv signifie que $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge. La généralisation faite ici est donc de remplacer la valeur absolue par les double-traits de norme.
L'expression de "conv. normale" en revanche est réservée à la littérature francophone (inexistant en lit. anglophone !) et désigne la conv. absolue de séries de fonctions par rapport à la norme sup.

Théorème 1.9. *Soit E un e.v.n. Alors*

$$E \text{ complet} \Leftrightarrow \text{toute série absolument convergente est convergente.}$$

Démonstration. $\Rightarrow$: On suppose que E est un e.v.n. complet. Soit une suite (x_n) dans E telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ (i.e. (x_n) est absolument convergente). Soit la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$. Alors, pour $N < M$: $\|S_N - S_M\| = \| \sum_{n=N+1}^{M} \| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (S_N) est de Cauchy donc par hypothèse (E complet), elle converge. Ceci veut dire que $\sum x_n$ converge.
$\Leftarrow$: Soit (x_n) de Cauchy, c'est à dire : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \qquad \forall n, m > M \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$
Pour $k \geq 1$, prenons $\varepsilon = 2^{-k}$. On note $y_k := x_{M_k}$ alors $\forall k, l > M_k \quad \|y_k - y_l\| \leq 2^{-\min(k,l)}$
En particulier $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$ donc par hypothèse (ie abs. conv. $\Rightarrow$ conv.), la série $\sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1} - y_k)$ converge ce qui équivaut à (y_n) converge. En effet, par télescopage,

$$y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1} - y_k) = y_1 + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} (y_{k+1} - y_k) = \lim_{K\to\infty} y_{K+1}$$

Donc la suite (x_n) admet une sous suite (y_n) convergente.

Lemme 1.10. *Dans ce cas, (x_n) converge vers la même limite que sa sous-suite.*

Démonstration. (du lemme) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un N avec $\|\ell - y_n\| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. De même, par Cauchy, il existe un $M > 0$ avec $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$ pour

$n, m > M$. Il suffit de choisir $m = M_k$ pour $k \geq N$ tel que $M_k > M$ pour assurer via $x_m = x_{M_k} = y_k$ que

$$\forall m \geq M : \qquad \|x_n - \ell\| \leq \|x_n - y_k\| + \|y_k - \ell\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

Conclusion dans la preuve du théorème : (x_n) converge (vers la même limite que (y_n)) donc E est complet. $\square$

Exercice : revoir le théorème de la convergence normale d'une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ comme un corollaire du théorème 1.9 et le fait que $C([a, b])$ est complet (exercice de TD) – ou à l'envers, déduire de ces deux théorèmes *que* $C([a, b])$ est complet.

1.2. Applications linéaires continues

Définition 1.11. Soient E, F deux e.v.n ; et $T : E \to F$ une application.
Si $\forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ alors on dit que **T est linéaire**.

Théorème 1.12. *Soient E, F deux e.v.n ; et $T : E \to F$ une application linéaire, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est uniformément continue (rappel : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in E^2 \quad \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$)*
2. *T est continue (rappel : $\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall y : \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$)*
3. *T est continue en $x = 0$*
4. *$\exists c > 0$ tel que $\|T_x\|_F \leq c.\|x\|_E$*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) : immédiat.
(3) $\Rightarrow$ (4). On va montrer (*non*4) $\Rightarrow$ (*non*3)
D'abord, observons que $T(0_E) = T(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot T(0_E) = 0_F$: des applications linéaires envoient toujours l'origine sur l'origine. Supposons maintenant (non4), donc

$$\forall n \geq 1,\ \exists x_n \in E \text{ tel que } \|T(x_n)\|_F > n^2 \|x_n\|_E.$$

Prenons $y_n = \frac{1}{n\|x_n\|} x_n$: $\|y_n - 0\| = \|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$.
Mais $\|T(y_n)\| = \frac{1}{n\|x_n\|}.\|T(x_n)\| > \frac{1}{n\|x_n\|}.n^2.\|x_n\| = n$ ce qui montre que $T(y_n) \nrightarrow T(0) = 0$ donc T n'est pas continue en 0, ce qui est (non3).
(4) $\Rightarrow$ (1) Soit c tel que $\|T_x\|_F \leq c.\|x\|_E$, Pour montrer cont. uniforme, soit $\varepsilon > 0$. On prend $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. On a alors $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq c\|x - y\| < \varepsilon$. $\square$

Définition 1.13. On appelle **norme d'opérateur de** T la norme définie par :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \overset{\text{def.}}{:=} \inf\{c > 0; \forall x \in E; \|Tx\|_F \leq c.\, \|x\|_E\}$$

Muni de la norme d'opérateur, $\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.n.

Exercice 1.14. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme ! Ensuite montrer que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}; x \neq 0\} = \sup\{\|Tx\|_F; \|x\| \leq 1\}$$

L'égalité des deux sup's est relativement simple. Pour l'égalité "inf=sup", montrer une double inégalité. Soit

$$\mathfrak{s} := \sup\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}; x \neq 0\} \quad \text{et} \quad I = \{c > 0; \forall x \in E; \|Tx\|_F \leq c.\, \|x\|_E\}$$

Justifier que $\|Tx\| \leq \mathfrak{s} \cdot \|x\|$ pour tout $x \in E$ et donc que $\mathfrak{s} \in I$. En déduire $\|T\| \leq \mathfrak{s}$. Expliquer pourquoi $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, pour conclure que $(\|T\| + \varepsilon) \in I$. En déduire que $\mathfrak{s} \leq \|T\| + \varepsilon$. Conclure.

Théorème 1.15. *Si E est un e.v.n. et F est un espace de Banach (e.v.n. complet), alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet si F est complet.*

Démonstration. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E; F)$. Rappelons que toute suite de Cauchy est bornée. Il existe donc $M > 0$ avec $\|T_n\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq M$. Alors pour tout x, $(T_n x)_n$est Cauchy dans F. Par hypothèse, $Tx := \lim T_n x$ existe. Voilà le candidat pour la limite. On a

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim T_n(\alpha x + \beta y) = \lim \alpha\, T_n(x) + \beta T_n(y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

d'où la linéarité de T. De plus,

$$\|Tx\|_F = \|\lim T_n x\|_F = \lim \|T_n x\|_F \leq M\|x\|_E$$

ce qui achève que $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Reste à montrer que $T_n \to T$ dans la norme de $\mathcal{L}(E; F)$. Soit $\varepsilon > 0$ et M le rang de la propriété de Cauchy de (T_n). Alors, pour $n \geq M$ et $\|x\| \leq 1$, on a

$$\|T_n x - Tx\|_F = \lim_m \|T_n x - T_m x\|_F \leq \varepsilon \|x\|$$

Il suit que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \varepsilon$ pour $n \geq M$. □

Proposition 1.16. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F un e.v.n. alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Démonstration. Soit E un e.v. de dimension n. Soit $(e_1, \ldots e_n)$ une base de E. Alors, pour tout $x \in E$; $\exists! \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Notons $\|\!|x|\!\| = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |\alpha_i|$: c'est une norme sur E (vérifier !). Par linéarité de T on a :

$$\begin{aligned}\|Tx\|_F = & \Big\|T(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i)\Big\|_F = \Big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i)\Big\|_F \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|T(e_i)\|_F \\ & \leq \big(\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |\alpha_i|\big) \sum_{i=1}^n \|Te_i\|_F = C.\|\!|x|\!\|,\end{aligned}$$

en posant $C = \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|_F$. Comme E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (voir cours S3), on a donc $C.\|x\| \le \tilde{C}\|x\|_E$ d'où $\|Tx\|_F \le \tilde{C}\|x\|_E$, donc T est continue, via le théorème1.12. $\square$

Remarque 1.17. Si $(E, \|.\|)$ est de dimension infinie, il existe des applications linéaires discontinues.

Exemple 1.18. Soit $E = c_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \ge N,\ x_n = 0\}$ (l'ensemble des suites stationnaires nulles). Soit la norme $\|x_n\|_\infty = \sup_{n\ge 1}|x_n|$ Rappelons qu'une base d'un espace vectoriel est une famille libre $\mathcal{B}$ telle que tout $x \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire (finie !) d'éléments de $\mathcal{B}$. Soit $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ la suite avec un seul 1 au rang i. Alors $\mathcal{B} = \{e_i : i \ge 0\}$ est une base de E. Soit

$$T : \begin{cases} E \to \mathbb{N} \\ (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n.x_n \end{cases}$$

C'est une somme finie car x_n est nul à partir d'un certain rang.

On a $|Te_n| = n = n\|e_n\|_\infty$ d'où

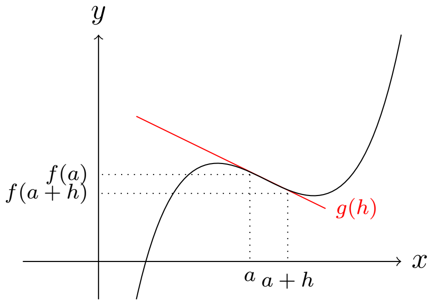
$$\sup_{x\neq 0} \frac{|Tx|}{\|x\|_\infty} \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|Te_n|}{\|e_n\|_\infty} = +\infty.$$

On voit que T n'est pas continue, par le théorème 1.12.

2. La différentielle

La dérivée de $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) est définie par : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ si cette limite existe.

Remarque 2.1. attention, cette définition n'a pas de sens si h est un vecteur. Par contre : (l'existence de $f'(a)$) $\Leftrightarrow$ ($\forall \varepsilon > 0$; $\exists \delta > 0$ tel que $\forall h \neq 0$, $|h| < \delta \Rightarrow |\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - l| < \varepsilon$) $\Leftrightarrow$ ($|f(a+h) - f(a) - hl| < \varepsilon|h|$) $\Leftrightarrow$ ($|f(a+h) - (f(a) + hl)| < \varepsilon|h|$)
Posons $g(h) = f(a) + hl$; g est la droite affine qui est tangente au graphe au point$(a, f(a))$. On dit que $g(h)$ est une approximation linéaire de f, proche de a (même si elle est affine).



Définition 2.2. Soit Ω un ouvert de E un e.v.n., $a \in \Omega$ et F un e.v.n. Soit $f : E \to F$. On dit **f est différentiable en a** s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que le reste $r(h) = f(a+h) - (f(a) + L(h))$ satisfait $\frac{\|r(h)\|_F}{\|h\|_E} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Pour une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on a le concept de dérivées partielles, notées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. On observe que, **si** f est différentiable, alors

$$\lim_{t\in\mathbb{R}\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a) + L(tv) + r(tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} L(v) + \frac{r(tv)}{t} = L(v)$$

car par hypothèse de différentiabilité, $\frac{r(tv)}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Pour $v = e_i$ on obtient $L(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.(par définition de la dérivée partielle). Ainsi L, si elle existe, est nécessairement représentée par la matrice Jacobienne :

$$\mathcal{J}_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \cdots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix}$$

Remarque 2.3.

— On a montré que si f est différentiable en a, alors L est représentée par la jacobienne $\mathcal{J}_f(a)$. La réciproque est fausse en général : l'existence de la jacobienne n'implique pas que f est différentiable. C'est vrai si l'application $a \mapsto \mathcal{J}_f(a)$ est continue (cf polycopié S3). Revoir le flowchart !

— On peut noter la différentielle de f au point a : $D_f(a)$ ou $df(a)$, $D_a(f)$.

Si f est différentiable en tout point $a \in \Omega$, on peut définir la fonction

$$D_f : \begin{cases} \Omega \to (\mathcal{L}(E,F)), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}) \\ a \mapsto D_f(a) = L \end{cases}$$

Proposition 2.4. *Propriétés de la différentielle :*

1. *f différentiable en $x = a \Rightarrow f$ continue en $x = a$*
2. *$D_{f+g}(a) = D_f(a) + D_g(a)$. Exercice : démontrer ceci ! Indication :* $(f+g)(a+h) = f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + ..$
3. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}, D_{(\lambda f)}(a) = \lambda D_f(a)$. Exercice : démontrer ceci ! Indication :* $(\lambda f)(a+h) = \lambda.f(a+h) = \lambda.f(a) + ..$
4. *Soient E, F, G des e.v.n.*
   Soient $\Omega \in E$ ouvert, et $\mathcal{O} \in F$ ouvert ; $f : \Omega \to F$, $g : \mathcal{O} \to G$ tel que $f(\Omega) \subset \mathcal{O}$.
   Alors si f différentiable en $a \in \Omega$ et g différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et : $D_{g\circ f}(a) = D_g(f(a)) \circ D_f(a)$.

L'ordre des différentielles est important ! " $\cancel{D_f \circ D_g}$ " n'est pas défini, en général, et même si, c'est faux. Le bon ordre se mémorise comme : **La différentielle de la composée est la composée des différentielles respectives dans le même ordre**. C'est à dire : la différentielle de $g \circ f$ (d'abord g) est $D_g \circ D_f$ (d'abord D_g). C'est simplement le résultat de la preuve qui suit !

Démonstration. Les points 1, 2 et 3 sont laissés en exercices.
Preuve de la propriété sur la composition de différentielle :

$$\begin{aligned} (g\circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) \\ &= g(f(a) + D_f(a)(h) + r_f(h)), \text{ par différentiabilité de } f \text{ en } a \text{ . On pose } k = D_f(a)(h) + r_f(h) \\ &= g(b) + D_g(b)(k) + r_g(k), \text{ par différentiabilité de g en f(a)} \\ &= (g\circ f)(a) + \underbrace{(D_g(b)\circ D_f(a))(h)}_{\text{partie linéaire } D_{g\circ f}(a)} + \underbrace{D_g(b)(r_f(h)) + r_g(k)}_{\varepsilon(h)} \end{aligned}$$

Montrons que $\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$

1. Montrons que d'une part $D_g(b)(r_f(h)) \xrightarrow{h\to 0} 0$:
   $\frac{D_g(b)(r_f(h))}{\|h\|} \leq \|D_g(b)\| \frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|}$ où $\|D_g(b)\|$ (la norme d'opérateur) est une constante réelle ($< \infty$), d'autre part, par différentiabilité de f on a $\frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$. D'où $D_g(b)(r_f(h)) \xrightarrow{h\to 0} 0$.

2. Montrons que $r_g(k) = r_g(D_f(a)(h) + r_f(h)) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\frac{\|r_g(k)\|}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\|r_g(D_f(a)(h) + r_f(h))\|}{\|D_f(a)(h) + r_f(h)\|}}_{(I)} \cdot \underbrace{\frac{\|D_f(a)(h) + r_f(h)\|}{\|h\|}}_{(II)}$

(I) Par continuité de la différentielle de f en a, $k = D_f(a)(h) + r_f(h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$; puis par différentiabilité de g : $\frac{\|r_g(k)\|}{\|k\|} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

(II) $\frac{\|D_f(a)(h)+r_f(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|D_f(a)(h)\|\|h\|+\|r_f(h)\|}{\|h\|} \leq \|D_f(a)\| + \frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \|D_f(a)\|$ qui est une constante $< \infty$.

Ainsi,le facteur (II) est borné, tandis que le facteur (I) tend vers 0. Le produit tend alors vers 0.

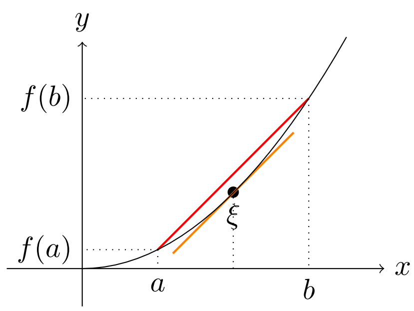
□

2.1. La formule des accroissements finis

Pour $f : \to \mathbb{R}$ rappelons la formule

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(\xi) \tag{2.1}$$

La tangente en $(\xi, f(\xi))$ est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Cette formule est fausse dès que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$: pour $a = 0$ et $b = 2\pi$ on a évidemment $f(2\pi) = f(0)$, mais pour tout ξ, $f'(\xi) = (-\sin(\xi), \cos(\xi))$ est de norme (Euclidienne) 1. Les deux quantités à droite et gauche de (2.1) ne seront donc jamais égales, peu importe ξ.

Mais on peut approcher $f(x+h) - f(x)$ autrement. Pour Ω ouvert, et $x \in \Omega$ il existe une boule de centre x de rayon $r > 0$ incluse dans Ω. On suppose $\|h\| < r$. Soit $g(t) = x + th$, $t \in [0,1]$ (décrit la "ligne droite" de x vers $x+h$, incluse dans Ω). Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable, et $\varphi = f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ (dérivable, de dérivée continue). On a : $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$ ce qui, par la différentielle de la composition donne

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 D_{f\circ g}(t)dt = \int_0^1 D_f(g(t)) \circ D_g(t)dt = \int_0^1 [D_f(x+th)](h)\, dt$$

(la différentielle de f en $(x+th)$ appliquée à h.) En prenant la norme à gauche et droite, on obtient par l'inégalité triangulaire

Proposition 2.5 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit E, F e.v.n. et Ω un ouvert de E. Soit $f : \Omega \to F$ différentiable. Alors*

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x)\|_F &\le \Big(\int_0^1 \|D_f(x+th)\|_{\mathcal{L}(E,F)}\, dt\Big)\ \|h\|_E \\ &\le \Big(\max_{t\in[0,1]} \|D_f(x+th)\|_{\mathcal{L}(E,F)}\Big)\ \|h\|_E\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la norme d'opérateur induite par les normes sur E et F respectivement. Voir aussi le polycopié de L2 p. 39, pour le calcul de ces normes dans le cas $E = \mathbb{R}^n$.

2.2. La différentielle seconde

Rappelons que pour une fonction d'une variable, $f'(a)$ donne la pente de la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$. A partir de cette définition, nous travaillons depuis longtemps avec la dérivée comme *fonction* : on associe naturellement à a la valeur $f'(a)$ et appelle cette fonction juste f'. Faisons la même chose en plusieurs variables :
Soit E, F des e.v.n., $\Omega \subset E$ ouvert et $f : \Omega \in E \to F$ différentiable en tout point $a \in \Omega$
On peut donc définir

$$D_f : \begin{cases} \Omega \to (\mathcal{L}(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}) \\ a \mapsto D_f(a) \end{cases}$$

(où $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la norme d'opérateur). On observe que D_f est elle-même une fonction définie sur un ouvert d'un e.v.n. (ici E) à valeurs dans un autre e.v.n. (ici $\mathcal{L}(E,F)$).
On peut alors se poser la question si (oui ou non), cette nouvelle fonction est continue (alors f sera appelé "de classe $\mathcal{C}^1$"), voir si D_f est différentiable ? Dans ce cas

$$D_{(D_f)}(a) \overset{\text{def.}}{=\!=}: D_f^2(a)$$

sera une application linéaire continue de $E \to \mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire $D_f^2(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$. On l'appelle **la différentielle seconde**, noté $D_f^2(a)$.

Remarque 2.6. Soit E, F, G des e.v.n. Comme pour les applications linéaires, une application bilinéaire $b : E \times F \to G$ est continue si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\|b(x,y)_G\| \le C.\|x\|_E \cdot \|y\|_F$$

La preuve, qui sera faite en TD suit les mêmes idées que celle du Théorème 1.12)

Proposition 2.7. *Il y a une identification naturelle entre $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$ et $BiLin(E \times E, F)$, l'espace vectoriel (normé) des applications bilinéaires de $E \times E \in F$.*

Démonstration. En effet, si $A \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$, on peut définir une application bilinéaire continue $b(x,y) \overset{\text{def.}}{:=} [A(x)](y)$. Vérifier les propriétés d'une application bilinéaire en développant $b(\alpha x + \beta y, \lambda u + \mu v)$.

Réciproquement, si $b : E \times E \to F$ est une application bilinéaire continue, alors $A_x : E \to F$ définie par $A_x(y) \overset{\text{def.}}{:=} b(x,y)$ est linéaire et continue. Il suit que

$$A : \quad \begin{cases} E \to \mathcal{L}(E,F) \\ x \mapsto A_x \end{cases}$$

est linéaire et continue. $\square$

Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, on identifie $D_f^2(a)$ à une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dans le cas $m = 1$, celle-ci s'identifie agréablement : Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ différentiable. On a

$$D_g(k) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial x_j}(a).k_j = \langle \nabla g(a) | k \rangle.$$

Pour $g = D_f$ cela donne

$$(D_f^2(a)(h))(k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D_f(a)}{\partial x_j}(h).k_j$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_f(a)}{\partial x_j}(h) &= \lim_{t \to 0} \frac{D_f(a + t.e_j) - D_f(a)}{t}(h) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_l}(a + t.e_j).h_l - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_l}(a).h_l}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \sum_{l=1}^{n} \tfrac{1}{t} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_l}(a + t.e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_l}(a) \Big].h_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} \lim_{t \to 0} (\tfrac{1}{t} \Big[\frac{\partial f}{\partial x_l}(a + t.e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_l}(a) \Big].h_l) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big)(a).h_l
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[D_f^2(a)(h)](k) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}(a).h_l).k_j = \langle h | \mathrm{Hess}_f(a).k \rangle = h^t.\mathrm{Hess}_f(a).k$$

où $\mathrm{Hess}_f(a)$ est la matrice des dérivées partielles secondes :

$$\mathrm{Hess}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \vdots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque 2.8. Si $a \mapsto \mathrm{Hess}_f(a)$ est continue (coordonnée par coordonnée), nous savons de la L2 que $\mathrm{Hess}_f(a)$ est symétrique. Il suit par la discussion précédente qu'alors $a \mapsto D_f^2(a)$ est continue, ce qui justifie de dire "f est de classe $\mathcal{C}^2$".

De la même façon, les **différentielles supérieures** se définissent de proche en proche, en posant

$$D_f^k(a) = D_{D_f^{k-1}}(a).$$

La différentielle ordre k s'identifie alors à une application k-multilinéaire continue

$$D_f^k(a) : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{\text{k fois}} \longrightarrow F.$$

2.3. La formule de Taylor

En dimension 1 : $g \in \mathcal{C}^n[I], I \subseteq \mathbb{R}\ , \xi \in (t, t+h)$

$$g(t+h) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g^{(j)}(t)}{j!} h^j + \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} h^n$$

où $R_n(h) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} h^n$ (reste de Lagrange)

Remarque 2.9. On a aussi la version du reste

$$R_n(h) = h^n \int_0^1 (1-s) g^{(n+1)}(t+sh) ds$$

qui s'appelle reste de Laplace.

Soit E, F des e.v.n et $\Omega \subseteq E$ ouvert : $f : \Omega \to F$ de classe $\mathcal{C}^n$. Posons $g : t \mapsto f(a+th)$ où $a \in \Omega$ et $\|h\|$ est petite. En appliquant Taylor on obtient

$$g(0+h) = g(0) + g'(0)h + \frac{g''(0)}{2} h^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} h^n$$

où $g(0) = f(a), g'(0) = D_f(a)(h), g''(0) = \frac{d}{dt}(D_f(a+th)(h))|_{t=0} = D_f^2(a)(h,h)$, etc. d'où :

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} D_f^{(j)}(a) \underbrace{(h, \dots, h)}_{j \text{ fois}} + \frac{1}{n!} D_f^{(n)}(a+\xi h) \underbrace{(h, \dots, h)}_{n \text{ fois}}, \xi \in (0,1)$$

On peut naturellement écrire en ajoutant et retranchant le terme de rang n :

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D_f^{(j)}(a)(h, \ldots, h) + \underbrace{\frac{1}{n!}[D_f^{(n)}(a+\xi h)(h, \ldots, h) - D_f^{(n)}(a)(h, \ldots, h)]}_{\text{reste}}$$

Ce reste “modifié” s'appelle reste de Young. Par multilinéarité,

$$\|D_f^{(n)}(a+\xi h)(h, \ldots, h) - D_f^{(n)}(a)(h, \ldots, h)\| \leq \|h\|^n \, \|D_f^{(n)}(a+\xi h) - D_f^{(n)}(a)\|_{\mathcal{L}(E;F)}$$

Observons que $D_f^{(n)}$ est continue dans $\mathcal{L}(E, F)$: pour $\varepsilon > 0$ il existe donc $\delta > 0$ tel que $\|h\| < \delta$ implique

$$\|D_f^{(n)}(a+\xi h) - D_f^{(n)}(a)\|_{\mathcal{L}(E;F)} < \varepsilon$$

peu importe $\xi \in (0, 1)$. Par conséquent, le reste est $o(\|h\|^n)$. On obtient la **Formule de Taylor en dimension quelconque**

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D_f^{(j)}(a)(h, \ldots, h) + o(\|h\|^n)$$

2.4. Extrema locaux

Soit $\Omega \subseteq E$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admet respectivement un maximum (minimum) local en $a \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(a, r) : f(a) \geq f(x)$ respectivement $f(a) \leq f(x)$.
Si a est un tel extremum local alors pour tout $v \neq 0$, $g(t) = f(a + tv)$ est une fonction différentiable (dérivable) qui admet un extremum local en $t = 0$: nécessairement $g'(0) = 0 \Leftrightarrow D_f(a)(v) = 0$ **C'est une condition nécessaire mais pas suffisante**. On appelle de tels points des **points critiques**. Puisque $\forall v \neq 0$, $D_f(a)(v) = 0$ on a comme condition nécessaire

$$D_f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$$

Pour étudier ces points critiques, **si** $f \in \mathcal{C}^2$, on peut analyser $D_f^2(a)$.

Définition 2.10. Une application bilinéaire b est **positivement définie** si : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \neq 0 \in E : b(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$. Une application bilinéaire b est **négativement définie** si : $\exists \alpha < 0$ tel que $\forall x \neq 0 \in E : b(x, x) \leq \alpha \|x\|^2$.

Remarque 2.11. Soit $E = \mathbb{R}^n$. En notant $b(x, y) = x^t A y$, A (donc b) est positivement définie (respectivement négativement définie) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives (respectivement strictement négatives). Par le critère de Hurwitz : A positivement définie $\Leftrightarrow \det(A_i) > 0$ pour toutes les sous-matrices principales A_i de A.
Attention, si A est négativement définie on a $\det(A_1) < 0; \det(A_2) > 0; \det(A_3) < 0 \ldots$ $(A_1 = (a_{11}))$(voir polycopié L2 p47-48)

Proposition 2.12. *Soit f de classe* $\mathbb{C}^2$, $a \in \Omega$ *un point critique.*

— *si* $D_f^2(a)$ *est positivement définie alors* f *admet un* ***minimum local*** *en* a

— *si* $D_f^2(a)$ *est négativement définie alors* f *admet un* ***maximum local*** *en* a

— *si* $\forall \lambda_i \in Spec(D_f^2(a))$, $\lambda_i \neq 0$ *et il existe* $\lambda_i > 0$ *et* $\lambda_j < 0$, *c'est à dire si* $b(x,x)$ *change de signe, alors* a *est un* ***point de selle****.*

— *si une valeur propre au moins est nulle alors on ne peut pas conclure.*

Démonstration. Dans le cas : $D_f^2(a)(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$. Par la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $\|h\| < \delta$, $|r(h)| < \alpha^2/4\|h\|^2$. Il suit

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \underbrace{D_f(a)(h)}_{=0} + \frac{1}{2!} D_f^2(a)(h,h) + r(h) \\ &\geq f(a) + \frac{\alpha^2}{2}\|x\|^2 + r(h) \\ &\geq f(a) + \frac{\alpha^2}{4}\|x\|^2. \end{aligned}$$

On voit que a est bien un minimum local (au moins un minimum dans toute la boule $B(a,\delta)$, ce qui justifie le mot “local” !).
Même démonstration dans le cas $D_f^2(a)(x,x) \leq \alpha\|x\|^2$. *Pour le point de selle et le cas indéterminé : p. 49 - 50 du polycopié de L2.* □

3. Les grands théorèmes

3.1. Rappel

Théorème 3.1. *(Théorème du point fixe/ de Banach) Soit F une partie fermée d'un e.v.n. (ou d'un espace métrique) complet*, soit $\Phi : F \to F$ une application telle que*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L. \|x - y\|$$

où $L < 1$: on parle d'une contraction stricte.
Alors il existe une unique point fixe x^* tel que $\Phi(x^*) = x^*$.

Exemple 3.2. Pour tout $a > 0$, la suite $x_0 = a$, et $x_{n+1}\frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}$ tend vers $\sqrt{a}$ dans $\mathbb{R}$: c'est la "suite de Heron" : cette méthode était déjà connue en Mésopotamie vers Hammurabi I, $\sim$ 1750 avant J.C. Vers 100 après J.C., Héron d'Alexandrie l'a rédigé dans son œuvre "Metrica"). Pour $a = 2$, la suite (x_n) est bien rationnelle mais ne peut converger dans $\mathbb{Q}$ - manque de limite ! On voit que la complétude (que $\mathbb{R}$ possède, mais pas $\mathbb{Q}$) est une hypothèse nécessaire.

Démonstration du théorème. a) Étape 1 : Existence :
Soit $x_0 \in F$ quelconque, et soit

$$x_{n+1} \stackrel{\text{def.}}{:=} \Phi(x_n)$$

pour tout $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})\| \\ &\leq L. \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq L^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ \leq \cdots &\leq L^n \|x_1 - x_0\| . \end{aligned}$$

De ce fait, par série géométrique de raison $L < 1$,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+k}\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \|x_{n+j} - x_{n+j+1}\| \quad &\leq \quad \sum_{j=0}^{k-1} L^j \|x_{n+1} - x_n\| \\ \leq \sum_{j=0}^{\infty} L^{j+n} \|x_1 - x_0\| \quad &= \quad L^n. \|x_1 - x_0\| \sum_{j=0}^{\infty} L^j \\ =; \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| & \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n > N$ on a : $\|x_n - x_{n+k}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon$. C'est précisément la caractérisation d'une suite de Cauchy. Par hypothèse de complétude cette suite (x_n) converge vers une limite x^* :

$$x^* = \lim(x_n) = \lim(x_{n+1}) = \lim \Phi(x_n) \overset{\Phi \text{ continue}}{=} \Phi(\lim(x_n)) = \Phi(x^*).$$

D'où l'existence d'un point fixe.

b) Étape 2 : Unicité du point fixe :
Soit y^* un point fixe. On a : $\|x^* - y^*\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(y^*)\| \leq L.\|x^* - y^*\|$. Or $L < 1$ donc $\|x^* - y^*\| < \|x^* - y^*\|$ Ceci implique $\|x^* - y^*\| = 0$ et $x^* = y^*$ d'où l'unicité.

□

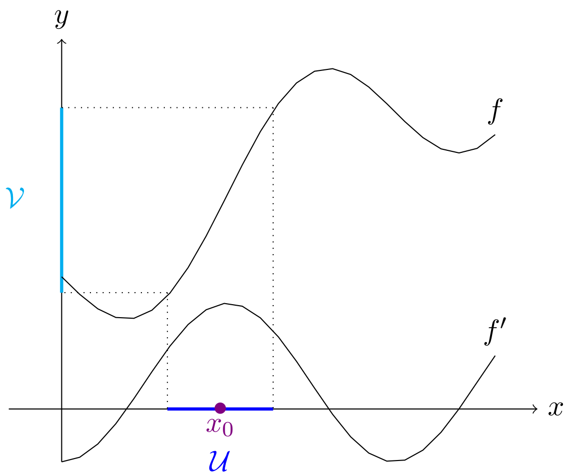
3.2. L'inversion locale

Situation en une dimension :

Proposition 3.3. *Soit*

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

de classe $\mathcal{C}^1$. Si en un point x_0, $f'(x_0) \neq 0$, alors il existe $\mathcal{U}$ un voisinage de x_0 et $\mathcal{V}$, voisinage de $f(x_0)$ tel que $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est bijective.



Démonstration. $f'(x_0) \neq 0$. Alors $f'(x_0) > 0$ ou bien $f'(x_0) < 0$. On va supposer $f'(x_0) > 0$ (les deux situations se traitant symétriquement) et montrer qu'alors il existe $r > 0$ tel que $f'(x_0) > 0$ sur $(x_0 - r, x_0 + r)$. f' est continue, on fixe $\frac{f'(x_0)}{2} = \varepsilon$ Alors il existe $r > 0$ tel que $|x - x_0| < r \Rightarrow |f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$. Or $f'(x) = f'(x_0) + f'(x) - f'(x_0) \geq f'(x_0) - \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0$. (i.e : une fonction strictement positive dans un point est strictement positive dans un certain voisinage de ce point). En conclusion, f est strictement monotone donc elle est injective. De plus $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ est un intervalle (par le T.V.I.) donc f est bijective. □

Remarque 3.4. Garde ! On a montré que "si $f' \neq 0$, alors f est inversible". Ceci *ne veut pas* dire "si $f'(x) = 0$ alors f n'est pas inversible". Pensez à $f(x) = x^3$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue et strictement croissante, donc inversible (sur tout $\mathbb{R}$), pourtant, $f'(0) = 0$.

Exercice 3.5. Appliquer la proposition à $\sin(.)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$, à $\cos(.)$ sur $[0, \pi]$ et à $\tan(.)$ sur $(-\pi/2, \pi/2)$. Qu'obtenez vous ?

Avant d'entamer le cas de plusieurs variables regardons une extension très utile de la série géométrique.

Lemme 3.6. *(La série de Neumann*) Soit E un e.v.n. complet et $A = E \to E$ linéaire telle que $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_E : \quad \|x\| \leq 1\} \leq q < 1$. Alors $(\mathrm{Id} - A)$ est inversible,*

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \qquad \textit{et donc} \qquad \|(\mathrm{Id} - A)^n\| \leq \tfrac{1}{1-\|A\|}$$

Démonstration. On pose

$$S = \mathrm{Id} + \sum_{n\geq 1} A^n \qquad \text{et} \qquad S_N = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{N} A^n$$

La série converge absolument, donc elle converge (via les théorèmes 1.9 et 1.15). Or

$$S_N(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{N} A^n - (A + \sum_{n=1}^{N} A^n.A) = \mathrm{Id} + A - A - A^2 + A^2 + \cdots = \mathrm{Id} - A^{N+1}$$

(somme télescopique). On obtient de même $(\mathrm{Id} - A)S_N = \mathrm{Id} - A^{N+1}$, donc $(\mathrm{Id} - A)S_N = S_N(\mathrm{Id} - A)$. Vu que $S_N \to S$ et que

$$\|A^N\| \leq \|A\|^N = q^N \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } N \to \infty$$

la droite de cette équation tend vers Id, la gauche converge donc également, notamment vers $S(\mathrm{Id} - A) = (\mathrm{Id} - A)S$. Il suit que $S = (\mathrm{Id} - A)^{-1}$! (ceci ressemble beaucoup à une suite géométrique avec des matrices à la place des scalaires). Finalement, on conclut par

$$\|(\mathrm{Id} - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \tfrac{1}{1-\|A\|}. \qquad \square$$

Théorème 3.7. *Soit E un espace de Banach (i.e. e.v.n. complet), $\Omega \subseteq E$ et $f : \Omega \to E$, de classe $\mathcal{C}^1$ On suppose $D_f(a) \in \mathcal{L}(E)$ inversible. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(a)$ tel que :*

$$f\mid_{\mathcal{U}}: \begin{cases} \mathcal{U} & \to \mathcal{V} = f(\mathcal{U}) \\ x & \mapsto f(x) \end{cases} \quad \textit{soit bijective et } (f\mid_{\mathcal{U}})^{-1} \textit{de classe } \mathcal{C}^1$$

Si $f \in \mathcal{C}^r$ alors $(f\mid_{\mathcal{U}})^{-1} \in \mathcal{C}^r$ $(r \geq 1)$.

Remarque 3.8. $(\star)$ Quand on demande que $D_f(a)$ soit "inversible" dans le théorème, il est sous-entendu que l'inverse est prise dans $\mathcal{L}(E)$ — c'est à dire : l'inverse est linéaire (ce qui est clair) **et** continue (ce qui n'est pas clair). Heureusement, il n'y a pas besoin

*. d'après Karl Gottfried Neumann (7 mai 1832 à Königsberg, mort le 27 mars 1925 à Leipzig), un mathématicien allemand.

de le vérifier : en effet, car E est un espace de Banach, toute application $T : E \to E$ linéaire, continue et bijective satisfait que T^{-1} est *automatiquement* continue (ceci est le “théorème de l'application ouverte”). Dans un e.v.n. non-complet ceci n'est pas garanti, et faux en général. Ce théorème est hors portée pour ce cours. Deux choix se posent : soit on l'admet, soit on se place en dimension finie où de toute manière “linéaire implique continue”.

Démonstration. On pose $f_0(x) = [D_f(a)]^{-1}(f(x))$, cela garantit $D_{f_0}(a) = \mathrm{Id}$. Soit $f_1(x) = f_0(x-a) - f_0(a)$, ainsi $f_1(0) = 0$, $D_{f_1}(0) = \mathrm{Id}$. On peut travailler avec f_1 à la place de f et supposer $f(0) = 0$, $D_f(0) = \mathrm{Id}$.
Soit $h(x) = x - f(x)$, $D_h(0) = \mathrm{Id} - \mathrm{Id} = 0$. Or $f^1 \in \mathcal{C}^1$ donc $h \in \mathcal{C}^1$ et D_h continue. Donc il existe un $r > 0$ tel que pour tout $\|x\| < r$ on a $\|D_h(x)\| \leq 1/2$. Le point de cette construction est de rendre h une contraction sur $B[0,r]$ via le théorème des accroissements finis.
Soit $y \in E$ tel que $\|y\| \leq \frac{r}{2}$ et $h_y(x) = y + h(x)$. Remarquons que h_y est une contraction, car h en est une. De plus, $\forall z \in E$ tel que $\|z\| \leq r$, on a

$$\|h_y(x) - h_y(z)\| = \|h(x) - h(z)\| \leq 1/2\|x - z\| \leq 1/2(\|x\| + \|z\|) \leq r$$

On a donc que $h_y : B[0,r] \to B[0,r]$ est une contraction stricte. Par le théorème du point fixe, théorème 3.1 il existe un point fixe x_y de h_y, i.e. on a $h_y(x_y) = x_y$. Par simplification, $y + h(x_y) = x_y \Leftrightarrow y + (x_y - f(x_y)) = x_y \Leftrightarrow y = f(x_y)$. On a donc trouvé une fonction $g : y \to x_y$ qui est l'inverse locale de f ! Cette fonction satisfait $g(f(x_y)) = g(y) = x_y$. On a donc $g \circ f = id$. De même, $f(g(y)) = f(x_y) = y$, ce qui donne $f \circ g = id$. Il reste à vérifier que g est Lipschitzienne (donc continue), différentiable et que sa différentielle est continue.

Étape 1 : Montrons que g est Lipschitzienne. On prend désormais la notation de $x, \tilde{x} \in \mathcal{U}$, et $y = f(x)$, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, ou, la formule retourné, $g(y) = x, g(\tilde{y}) = \tilde{x}$. On a

$$\begin{aligned}\|x - \tilde{x}\| &= \|h(x) - h(\tilde{x}) + f(x) - f(\tilde{x})\| \leq \|x - \tilde{x}\| \\ &= \|h(x) - h(\tilde{x})\| + \|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\| + \|f(x) - f(\tilde{x})\|\end{aligned}$$

car h est $1/2$-contractante. D'où

$$\|x - \tilde{x}\| \leq 2\|f(x) - f(\tilde{x})\| \Leftrightarrow \|g(y) - g(\tilde{y})\| \leq 2\|y - \tilde{y}\| \tag{3.1}$$

où donc g est 2-Lipschitzienne.

Étape 2 : Montrons que g est différentiable.
On commence par “deviner” la bonne formule : observons qu'en une variable réelle,

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{f'(x)}.$$

En termes de différentielle (opposé à la dérivée), le “1 sur” dans la formule correspond à inverser la différentielle de f au point x. SVP, essayez de comprendre ceci. Arrêtez *vous le temps qu'il faut pour y réfléchir*. Ceci amène à un "educated guess" : on tente d'écrire

$$g(\tilde{y}) = g(y) + L(y - \tilde{y}) + \text{reste}$$

où $L = [D_f(x)]^{-1}$: par la discussion ci-dessus, c'est le candidat "naturel" pour la différentielle de g ! On a déjà que L est linéaire et continu par hypothèse (voir aussi la remarque). Pour voir que c'est la "bonne" application linéaire , on doit montrer que le reste est négligeable devant $y - \tilde{y} = f(x) - f(\tilde{x})$ en norme. Allons y :

$$\|g(y) - g(\tilde{y}) - [D_f(x)]^{-1}(y - \tilde{y})\| = \|g(y) - g(\tilde{y}) - [D_f(x)]^{-1}(f(x) - f(\tilde{x}))\|.$$

L'hypothèse que f est différentiable donne $f(\tilde{x}) = f(x) + D_f(x)(\tilde{x} - x) + r_f(\tilde{x} - x))$ avec un contrôle du reste. On injecte tout et on simplifie :

$$\begin{aligned}
&= \|g(y) - g(\tilde{y}) - [D_f(x)]^{-1}(y - \tilde{y})\| \\
&= \|g(y) - g(\tilde{y}) - [D_f(x)]^{-1}(D_f(x)(\tilde{x} - x) - r_f(\tilde{x} - x))\| \\
&= \|g(y) - g(\tilde{y}) - (\tilde{x} - x) - [D_f(x)]^{-1}(r_f(\tilde{x} - x))\| \\
&= \|[D_f(x)]^{-1}(-r_f(\tilde{x} - x))\| \\
&\leq \|D_f(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,E)}.\|r_f(\tilde{x} - x)\|
\end{aligned}$$

Rappelons que $\|D_h(x)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq 1/2$ pour $\|x\| \leq r$. Par la série de Neumann,

$$\|[D_f(x)]^{-1}\| = \|[\mathrm{Id} - D_h(x)]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|D_h(x)\|} \leq 2.$$

Ceci implique que le reste satisfait :

$$\begin{aligned}
\|g(y) - g(\tilde{y}) - [D_f(x)]^{-1}(y - \tilde{y})\| &\leq 2\frac{\|r_f(\tilde{x} - x)\|}{\|x - \tilde{x}\|}.\|x - \tilde{x}\| \\
&\leq 2\frac{r_f(x - \tilde{x})}{\|x - \tilde{x}\|} \times 2\|y - \tilde{y}\|.
\end{aligned}$$

via (3.1). Puisque $\tilde{y} \to y$ implique $\tilde{x} \to x$ et

$$\frac{\|r_f(x - \tilde{x})\|}{\|x - \tilde{x}\|} \xrightarrow{\tilde{x} \to x} 0$$

par notre hypothèse sur f, on a bien que g est différentiable et $D_g(y) = L = [D_f(x)]^{-1}$!

Étape 3 : Montrons que $y \mapsto D_g(y)$ est continue
On observe que sur $\Omega = \{T \in \mathcal{L}(E,E) : \quad T \text{ est inversible}\}$ l'application inv : $T \mapsto T^{-1}$ satisfait par la série de Neumann que

$$(T + H)^{-1} = (\mathrm{Id} - T^{-1}H)^{-1}T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(T^{-1}H)^n T^{-1}$$

dès que $\|H\| < r \stackrel{\text{def.}}{:=} \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. En particulier, on voit que $T \in \Omega$ implique $B(T,r) \subset \Omega$ ce qui prouve que Ω est un ouvert. De plus, inv : $T \mapsto T^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$, car développable autour de tout $T \in \Omega$ en série entière de rayon $r > 0$!
Puisque inv, D_f, g sont continues, leur composée $D_g = \text{inv} \circ D_f \circ g$ l'est également. De la même manière, en procédant de proche en proche, on a le résultat $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow g \in \mathcal{C}^k$. $\square$

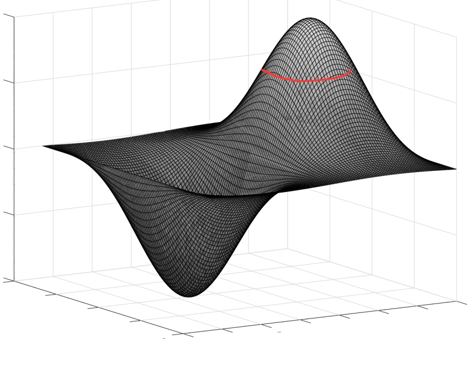
Exemple 3.9. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{cases}$ Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et sa différentielle est représentée par $\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ dont le déterminant $\det \mathcal{J}_f = 4x^2 + 4y^2$ est non nul sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$. Par le théorème d'inversion locale, il existe pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ tel que $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ est inversible. De plus $\mathcal{J}_f^{-1}(f(x,y)) = (\mathcal{J}_f(x,y))^{-1}$.

Remarque 3.10. L'application $z \mapsto z^2$ dans $\mathbb{C}$ est donnée par f de l'exemple ci-dessus, si on identifie $z = x + iy$ à (x,y). Par exemple, $i^2 = -1$ devient $f(0,1) = (-1,0)$ et $\mathcal{J}_f{}^{-1}(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$.

On voit que, localement, $z \mapsto z^2$ admet une inverse dans $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, sans qu'elle ne puisse être globale. Une solution de trouver une "racine" est de se restreindre à $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ – ce qui enlève l'ambiguité de signe, que p.ex. $2^2 = (-2)^2 = 4$. L'étude de fonctions complexes est réservé au M1.

3.3. Théorème des fonctions implicitement définies

L'idée : soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. L'ensemble $\{(x,y,z); z = f(x,y)\}$ (donc le graphe de f) est représenté par une surface, comme la surface d'une montagne : chaque ligne de niveau serait une courbe pour un certain z fixé : Question : en un point, puis je trouver une courbe isocline, c'est à dire où la hauteur est constante ? Et est-ce que je peux caractériser cette courbe ?



Généralisons : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $m < n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ et un "ensemble de niveaux" (qui n'est pas nécessairement une ligne) :

$$N_c = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = c\}.$$

En se plaçant dans l'exemple, où n=2 et k=1 cela nous donnera la ligne de niveau "locale" pour $f(x,y) = c$. On cherche à effectuer une résolution locale : de certaines variables par rapport aux autres : on a $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On pose $x = (x', x'')$ où $x' = (x_1, \ldots, x_k)$ et $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. On cherche alors une application "locale", $\gamma : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ définie dans le voisinage $\mathcal{U}$ d'un point x_0' tel que

$$f(x', \gamma(x')) = c.$$

Le cas des applications linéaires

Exemple 3.11. Résoudre certaines variables par rapport à d'autres peut être une démarche "perdue d'avance", par des arguments de dimension (théorème du rang). Commençons avec un exemple : soit

$$f(x, y, z) = x + y + z,$$

qui est une fonction linéaire. L'équation $f(x, y, z) = 42$ définit un hyperplan affine $H = N_{42}$: il ne pourra pas être complètement décrit, même localement, avec deux fonctions g et h dépendant d'un seul paramètre : quoi qu'on fasse avec g et h, l'ensemble $\{(t, g(y), h(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ ne sera qu'une courbe (unidimensionnelle) dans l'hyperplan (deux-dimensionnel). En revanche, on peut facilement résoudre *une seule* des 3 variables par rapport aux *deux autres* : par exemple,

$$f(x, y, 42 - x - y) = 42 \qquad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 3.12. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Pour rester dans le cas linéaire, prenons

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y \end{pmatrix}$$

Alors le système d'équations $g(x, y, z) = c = (42, 36)$ est un système de deux équations (indépendantes) pour 3 inconnues. L'ensemble des solutions, intersection de deux hyperplans, est donné par une droite affine, notamment

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

qui se paramétrise facilement en fonction d'une seule des trois variables : par exemple

$$g(x, x - 36, -2x + 78) = (42, 36)^{\mathtt{t}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ce qui résout (y, z) par rapport à x. De même on peut résoudre y par rapport à (x, z) ou z par rapport à (x, y).

La situation observée dans les deux exemples est générique pour des applications linéaires : soit A une matrice $m \times (k+m)$ de plein rang (rang m) et $f(x) = A.x$. Le “plein rang” sert à assurer $f(\mathbb{R}^{k+m}) = \mathbb{R}^m$, i.e. à atteindre tout $c \in \mathbb{R}^m$ comme valeur sous f. Quitte à permuter des colonnes, nous pouvons alors supposer que

$$A = \left(\boxed{\begin{matrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,k} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} a_{1,k+1} & \dots & a_{1,k+m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,k+1} & \dots & a_{m,k+m} \end{matrix}} \right) = (A_1|A_2)$$

avec la deuxième matrice, A_2, inversible (elle est de rang m et de taille $m \times m$). Alors pour tout $c \in \mathbb{R}^m$ et tout $x' \in \mathbb{R}^k$ il existe un (unique) $x'' \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$A \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = A_1 x' + A_2 x'' = c$$

notamment $x'' = A_2^{-1}(c - A_1 x')$. Ainsi, si $f(x', x'') = A(x', x'')^{\mathtt{t}}$,

$$\forall x' \in \mathbb{R}^k : \qquad f(x', A_2^{-1}(c - A_1 x')) = c.$$

La variable “plein rang” (ici x'') permet donc une “résolution”, on peut l’écrire comme fonction de l’autre variable (ici x'). Puisque la structure est linéaire, on peut résoudre “globalement”, sur tout $\mathbb{R}^k$, x'' comme fonction de x'. Cela change dans

Le cas général.

Le cas d’une fonction $f \in \mathcal{C}^1$ générale (non-linéaire) est évidemment plus complexe ; entre autre on ne peut pas espérer une résolution “globale”. Le théorème suivant est frappant : il montre que si la *linéarisation* $A = D_f(a)$ d’une fonction f autour d’un point a permet une résolution de certaines variables (accumulées par permutation en x'', comme ci-dessus) par rapport aux autres (les variables de x'), alors la résolution de x'' comme fonction de x' reste est vraie pour la fonction f, au moins dans un voisinage de a.

Théorème 3.13. *Soit E, F deux espaces de Banach, $\mathcal{U} \subset E$ ouvert et $\mathcal{V} \subset F$ ouvert. Soit $f : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to F$ de classe $\mathcal{C}^r$, pour $r \geq 1$. On note $D_x f$ et $D_y f$ les différentielles par rapport à x et y respectivement.*
Si $f(x_0, y_0) = c_0 \in F$ et si $D_y f(x_0, y_0)$ est inversible, alors il existe des ouverts $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ et une fonction $g : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}_0$ tels que pour tout $x \in \mathcal{U}_0$ on ait $f(x, g(x)) = c_0$. La fonction $x \mapsto f(x, g(x))$ est donc constante sur $\mathcal{U}_0$!

Démonstration. Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{U} \times \mathcal{V} & \to \quad E \times F \\ (x, y) & \to \quad (x, f(x, y)) \end{cases}$$

Or $f \in \mathcal{C}^r$ et $r \geq 1$, il en est de même pour φ et D_φ satisfait

$$D\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id}_E & 0 \\ \hline D_x f & D_y f \end{array} \right)$$

à l'effet que $D\varphi$ est inversible ("matrice par blocs"). Par le théorème de l'inversion locale, il existe un voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ sur lequel φ est inversible. On peut le restreindre d'avantage à la forme $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0$ souhaitée. Soit ψ l'inverse locale de φ. Cette fonction s'écrit nécessairement comme $\psi(x, y) = (x, h(x, y))$ avec $x \in E$ et $y \in F$. On pose $g(x) = h(x, c_0)$. Puisque f et donc φ sont $\mathcal{C}^r$ par le théorème d'inversion locale $\psi \in \mathcal{C}^r$; on a ainsi $h \in \mathcal{C}^r$ et donc $g \in \mathcal{C}^r$. On a

$$(x, f(x, g(x))) \overset{\text{def. de } \varphi}{=\!=} \varphi(x, g(x)) \overset{\text{def. de } g}{=\!=} \varphi(x, h(x, c_0)) \overset{\text{def. de } h}{=\!=} (\varphi \circ \psi)(x, c_0) \overset{\psi = \varphi^{-1}}{=\!=} (x, c_0)$$

sur $\mathcal{U}_0$ ce qui donne, par comparaison de la deuxième composante, l'équation

$$f(x, g(x)) = c_0$$

souhaitée ! $\square$

Remarque 3.14. Si $f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}^m$ nous choisissons $E = \mathbb{R}^k$ et $F = \mathbb{R}^m$, ce qui veut dire que nous avons "ordonné" les variables en deux blocs : $x_{k+1}, \ldots x_{k+m}$ qui sont "à résoudre" par rapport aux variables $(x_1, \ldots x_k)$. Ceci n'est évidemment pas limitant quant à l'utilisation ! Par exemple, la fonction $\mathcal{C}^\infty$ donnée par $f(x, y, z) = x^2 + \sin(y) + \cos(z)$, satisfait $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 1, 0)$. Vu que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, on peut exprimer y en fonction de (x, z), proche de $(x_0, z_0) = (0, 0)$. En effet, il suffit d'appliquer le théorème à $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g((x, z), y) \overset{\text{def.}}{:=} f(x, y, z)$: On écrit $X = (x, z)$ et $Y = y$, puis $X_0 = (0, 0)$ et $Y_0 = 0$. Alors $D_Y g(X_0, Y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = 1$ est inversible dans $\mathbb{R}$ ...

3.3.1. Dérivation implicite

Dès que $h(x) = f(x, g(x)) = c$ sur $\mathcal{U}_0$ on a $D_h(x) = 0$ sur $\mathcal{U}_0$. Mais :

$$D_h(x) = (D_1 f)(x, g(x)) + (D_2 f)(x, g(x)) \circ D_g(x)$$

d'où :

$$D_g(x) = -[(D_2 f)(x, g(x))]^{-1}.(D_1 f)(x, g(x))$$

Exemple 3.15. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x^2 - 3xy + y^3 - 7 \end{cases}$$

On a $f(4, 3) = 0$ et $(\nabla f)(x, y) = (2x - 3y, -3x + 3y^2)$, donc $(\nabla f)(4, 3) = (-1, 15)$. La dérivée par rapport à la seconde variable est non nulle, donc d'après le théorème des fonctions implicitement définies il existe un voisinage de 4 ($\mathcal{U}_0 = (4 - \delta, 4 + \delta)$)et une fonction $g : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ (car $f \in \mathcal{C}^\infty$) avec $g(4) = 0$ et $f(x, g(x)) = 0$ On a donc

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)).g'(x) = 0, \forall x \in \mathcal{U}_0$$

d'où $g'(4) = -(-1) * \frac{1}{15} = \frac{1}{15}$ (car $(f_y(4,3))^{-1} = \frac{1}{15}$). On re-dérive, on obtient l'expression :

$$\begin{aligned} 0 = &f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x)).g'(x) \\ &+ \ f_{xy}(x, g(x)).g'(x) + f_y(x, g(x)).g''(x) + f_{yy}(x, g(x)).g'(x).g'(x) \end{aligned}$$

ce qui donne, après simplification, $g''(4)$:

$$g''(4) = -(f_{xx}(4,3) + f_{xy}(4,3)g'(4) + f_{xy}(4,3).g'(4) + f_{yy}(4, 3.g'(4)^2)).(f_y(4,3))^{-1} = \frac{14}{125}$$

Ceci permet d'avoir une bonne approximation de g autour de 4, en effet, on utilise un développement de Taylor, et, connaissant $g'(4)$ et $g''(4)$ on a :

$$g(4+h) = 3 + \frac{h}{15} + \frac{h^2}{2} \times \frac{14}{125} + o(h^2).$$

La même chose en 4 variables, pour mieux illustrer les différentielles :

Exemple 3.16. Soit

$$f(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + 2x - 2y + u\cos(x) + \arctan(v) \\ xy + \cos(xv) - e^{u^2} + (x-1)u \end{pmatrix}$$

à l'effet que

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} 2x + 2 - u\sin(x) & -2 & \cos(x) & \frac{1}{1+v^2} \\ y - v\sin(xv) + u & x & -2ue^{u^2} - 1 & -x\sin(xv) \end{pmatrix}$$

Au point $(0,0,0,0)$ on obtient

$$\mathcal{J}_f(0,0,0,0) = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \right)$$

où $D_1 f(0,0,0,0)$ est représentée par $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non inversible. Mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui représente $D_2 f(0,0,0,0)$ est, elle, inversible. Donc d'après le théorème il existe une voisinage $\mathcal{U}_0$ de $(0,0)$ (les deux premières coordonnées) et une fonction $g : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(0,0) = (0,0)$ (l'image des deux premières coordonnées du vecteur est égale aux deux autres, on se rappelle $g(x') = x''$)) et $f(x,y,g(x,y)) = 0$. On calcule la jacobienne de g en $(0,0)$:

$$\mathcal{J}_g(0,0) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où :

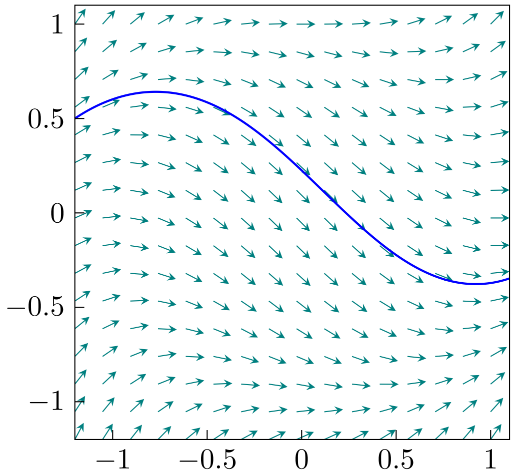
$$g(0+x, 0+y) = g(0,0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2+y^2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x+2y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

Deuxième partie

Équations différentielles

1. Introduction

Exemple. On cherche une fonction y telle que $y'(t) = f(t, y(t))$. En chaque point (t, y), on a donc la pente de la solution prescrite par les valeurs de f. Si on dessine la direction indiqué par ces valeurs, voici ce qui se passe. En bleue, vous avez *une* solution indiqué.



Pouvez vous dessiner la solution qui satisfait $y(0) = -1/2$?
Cette solution doit suivre le champ de directions dans les deux sens ...

Le vocabulaire "on cherche une fonction" suggère qu'on puisse toujours "résoudre" une équation différentielle, peut-être même de façon 'algorithmique', comme la résolution de $Ax = b$ par le pivot de Gauss. Malheureusement, ceci n'est pas si simple. Pour certaines classes de problème ceci sera possible, mais la plupart des problèmes provenant "du mode réel" on sera content de pouvoir démontrer qu'une solution existe (nous voilà rassurés !) et qu'elle est unique (le grand luxe). C'est une autre façon de regarder un problème, le focus n'est pas seulement sur la résolution.

1.1. Vocabulaire

Une équation différentielle (ordinaire), noté EDO est une relation entre une fonction inconnue (notée y) et ses dérivées, par exemple $y' = ay$. Formellement, si on définit une fonction $F : I \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, et étudie

$$\begin{array}{lrcl} & F(t,\, y(t),\, y'(t), \ldots,\, y^{(k)}(t)) & = & 0 \\ \text{ou bien} & F(t,\, y(t),\, y'(t), \ldots,\, y^{(k)}(t)) & = & y^{(k+1)}(t) \end{array} \tag{EDO}$$

La permière version est une équation *implicite*, tandis que la deuxième est *explicite* dans le sens que la plus haute dérivée de l'inconnue y est isolée à droite. Exemple.

$$(y(t)+t)^2 + (y'(t))^2 = 0$$

est une éaution implicite. Elle n'a pas de solution par ailleurs, car le deuxième carré exige $y' = 0$ docn y constant, alors que le premier demande $y(t) = t$. L'équation

$$(y(t)+t)^2 + y'(t) = 0$$

est explicite : le y' est "isolé". Il y a une infinité de solutions, à savoir

$$y(t) = 1 - t + \tfrac{1}{\lambda\, e^{2t} - 1/2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(mais qui n'existent pas pour tout t, le dénominateur n'ayant pas droit de s'annuler).

Définition 1.1. a) **L'ordre de l'équation différentielle** est le plus haut degré des dérivées. Dans (EDO) ci-dessus, l'ordre est donc k pour l'équation implicite et $k+1$ pour l'équation explicite.

b) Attention : malgré le fait que y prenne valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la variable t est toujours **réelle** : on pensera au temps. *Opposé à cela sont des équations différentielles d'une fonction y de plusieurs variables (souvent : temps et espace) : c'est le domaine des équations aux dérivées partielles (EDP) qui ne seront pas traitées dans ce cours.* Puisque y dépend donc d'une variable réelle, une solution $y : I \to \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée dans l'espace Euclidien. En particulier, les dérivées se calculent coordonné par coordonnée, pas de différentielle, ni de jacobienne, etc.

c) Si dans (EDO), on a $d > 1$ on parle de **système d'équations** : les "fonctions coordonnées" de F donnent d équations scalaires. Exemple.

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sin(x(t)) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{aligned}$$

peut s'écrire de façon vectorielle en notant $Z = (x, y)$, $Z' = (x', y')$ et donc $Z' = F(Z)$ où $F(a, b) = (\sin(a) + b,\ x + 2b)$. Inversement, l'équation $Z' = F(Z)$ peut se lire "ligne par ligne" et re-donne un système de deux équations pour les fonctions inconnues x, y,

d) Si on ajoute (EDO) des conditions du type

$$(y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(l)}(t_0)) = (y_0, y_1, \ldots, y_l)$$

on parle d'une **condition initiale**. En général on choisit l égal au degré de l'équation. Il est important que t_0 dans une condition initiale soit partout le même. Donc : une condition du type $y(0) = 0, y(\pi) = 1$ n'est pas une condition initiale, mais une condition "aux bords". On ne traite que anecdotiquement de telles équations p.ex. en exercices de TD (elles sont plus difficiles en général).

e) Le problème (EDO) + (condition initiale) est appelé **problème de Cauchy**.

f) Quand F ne dépend pas de t, mais que de y et ses dérivées, on dit que le problème est **autonome**, et sinon, on l'appelle **non-autonome**.

Exemple 1.2.

a) Soit a réel. Alors $y' = ay$ a pour solution $y(t) = \exp(at)y(0)$.
b) De même, $y'' = -a^2y$ a pour solutions $y_1(t) = \cos(at), y_2(t) = \sin(at)$; ce qui donne l'ensemble des solutions : $\{\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, il y a donc une infinité de solutions (on verra ceci en détail plus tard).
c) $y'(t) = \sqrt{y(t)}$, avec y à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ a pour solution 0, $\psi_a(t) = \frac{1}{4}(t-a)^2$, et
$$\varphi_{b,c} = \begin{cases} \psi_b(t) & \text{si } t \leq b \\ 0 & \text{si } b \leq t \leq c \\ \psi_c(t) & \text{si } t \geq c \end{cases}$$

Ces exemples montrent : il va falloir étudier l'existence d'une éventuelle solution, et voir dans quels cas elle est unique, ou non.

1.1.1. Réduction d'ordre — et l'importance de l'ordre 1

Si on souhaite étudier l'équation explicite
$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{$\star$}$$
où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on peut poser $Y(t) = \left(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}\right)^t$. Alors :
$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix}$$

Si $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ est la projection de Y sur ses $n-1$ dernières coordonnées, donc $\pi : (a_1, a_2, \dots, a_n)^t = (a_2, \dots, a_n)^t$, et si n définit $F(t, Y(t)) := (\pi(Y), f(t, Y))$. Alors ($\star$) se réécrit
$$Y'(t) = F(t, Y(t)). \tag{$\star\star$}$$
ce qui est un sytème de n équation ordre 1 - comparé à ($\star$) qui est une équation d'ordre n.

Exemple 1.3. On veut résoudre $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)},\ a_k \in \mathbb{R}$, et pose $Y = (y, y', \vdots, y^{(n-1)})^t$ ce qui donne $Y' = (y', y'', \vdots, y^{(n)})^t$. On a alors

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Deux illustrations concrètes : si $n = 2$, on résout $y'' = -y$ en posant $Y = (y, y')$, alors $Y'' = (y', y'')$ et

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y.$$

ce qui rejoint l'exemple d'en haut pour $\omega = 1$. Si on cherche à résoudre $y^{(3)} = y + 2y' + 3y''$ on a :

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

L'importance de cette réécriture en ordre 1 est la suivante : si φ est solution de $(\star)$, alors $\Big(\varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\Big)$ est solution de $(\star\star)$. Inversement, si $\Big(\psi_0(t), \dots, \psi_{n-1}(t)\Big)$ est solution de $(\star\star)$ alors $\varphi(t) := \psi_0(t)$ est solution de $(\star)$. Il suit que toute la théorie d'existence et ou unicité à développer pour des problèmes d'ordre 1 se généralise directement à l'ordre supérieur. Ce qui explique l'importance d'étudier l'ordre 1 ! Allons y.

1.2. Équations d'ordre 1 : techniques de résolution

On s'intéresse pour le reste de ce chapitre à $y' = f(t, y)$ dans le cas où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert.
Une observation gratuite : si f ne dépend pas de y, on a $y' = f(t)$, et

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(s)\, ds.$$

On peut donc "intégrer l'équation". Dans le cas général, on a

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y(s))\, ds.$$

Ceci ne permet pas de résoudre directement l'équation, mais on verra son utilité bientôt. Aussi il explique une formulation un peu désuette d'"intégrer l'équation" pour dire "la résoudre".

1.2.1. Séparation des variables

Théorème 1.4. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, et $g : J \to \mathbb{R}^*$, continues, et une valeur initiale $(t_0, y_0) \in I \times J$ donnée. On pose :*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \quad G(y(t)) = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(s)} ds$$

Si $K \subseteq I$ est un intervalle et $F(K) \subseteq G(J)$ alors $\begin{cases} y' = f(t)g(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ *admet une solution* ***unique*** *qui satisfait $G(y(t)) = F(t)$.*

Démonstration. Analyse-Synthèse

Analyse : Supposons que y soit une solution du système $\begin{cases} y' = f(t)g(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $(\star)$ Alors $y'(s) = f(s)g(y(s))$, comme $g \neq 0$, on a $\frac{y'(s)}{g(y(s))} = f(s)$. On intègre de chaque côté de l'égalité :$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$. En faisant un changement de variable $y(s) = u$ on obtient $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)} du = G(y(t))$, donc y, si elle existe, satisfait $G(y(t)) = F(t)$.

Synthèse : $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$, et continue, donc strictement positive, ou strictement négative partout. G est donc strictement monotone, donc injective. G continue et injective, ceci implique qu'elle est surjective, donc bijective, donc inversible. Posons $H = G^{-1}$. Par définition $y(t) = H(F(t))$. Donc une telle fonction y existe.
Montrons qu'elle satisfait le problème $(\star)$: $y(t_0) = H(F(t_0)) = H(0) = y_0$ d'une part.
D'autre part y est dérivable et on a :

$$y'(t) = (H(F(t)))' = H'(F(t))F'(t) = (G^{-1})'(F(t))F'(t) = \frac{F'(t)}{G'(G^{-1}(F(t)))} = g(y(t))f(t).$$

$\square$

Exemple 1.5. Soit $\begin{cases} y' = ty \\ y(1) = 2 \end{cases}$ donc par rapport au thm, $\begin{cases} f(t) = t \\ g(y) = y \end{cases}$ $(\star)$
$F(t) = \frac{t^2 - t_0}{2} = \frac{t^2-1}{2}$; $G(y) = \int_2^y \frac{ds}{s} = \ln(y) - \ln(2) = \ln(\frac{y}{2})$ continue, strictement croissante, et on a $G^{-1}(x) = 2\exp(x)$.
La solution est donnée par $y(t) = G^{-1}(F(t)) = 2\exp(\frac{t^2-1}{2})$.
On contrôle toujours le résultat ! ! : On dérive la solution obtenue, et regarde qu'elle vérifie bien l'edo souhaitée. $y'(t) = 2t\exp(\frac{t^2-1}{2}) = ty(t)$; $y(1) = 2$.
Par exemple, un erreur de signe, à savoir de confondre $y' + ty = 0$ avec $y' = ty$ introduit $G(y) = -\ln(y/2) = \ln(2/y)$. On va donc obtenir $2\exp(-\frac{t^2-1}{2})$ qui n'est pas solution. Ce genre d'erreur est fréquent, et facile à éviter : pas de pardon à l'examen là-dessus.
Une méthode un peu "symbolique" facile à mémoriser : on note $y' = \frac{dy}{dt}$, ce qui donne

$$\frac{dy}{dt} = f(t).g(y)$$

On multiplie sans se soucier avec “dt”, et divise par $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t).dt$$

Ceci “sépare les variables”. Puis on écrit $\int$ gauche & droite, pour obtenir

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t).dt$$

ceci donne la solution “générale” (c’est à dire : sans respecter la cond. initiale) ! Si on veut l’intégrer, on note

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} f(s).ds$$

Pour éviter des confusions et puisque t et y sont dans les bornes de l’intégrale, on change les variables ’muettes’ de l’intégration. Ainsi, dans l’exemple concret, où $f(s) = s, g(u) = u$) on a

$$\ln(y) - \ln(y_0) = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)$$

et on obtient $y = y_0 \exp(\frac{t^2 - t_0^2}{2})$, comme avant. Ce calcul étant un peu symbolique, on contrôle toujours le résultat.

1.2.2. Équations linéaires

Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose le problème

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

$b = 0$, on dit que l’équation est homogène. Sinon, on appelle b le second membre et l’équation non-homogène.

Proposition 1.6 (L’équation homogène)**.** *Toute solution du problème homogène est de la forme*

$$y_h(t) = c.\exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big)$$

où c est une constante réelle.

Démonstration. on procède par séparation des variables en posant $f(t) = a(t)$ et $g = id$ $\square$

Proposition 1.7 (Structure des solutions)**.** *Toute solution du problème linéaire est de la forme*

$$y(t) = y_p(t) + c.y_h(t)$$

où $c \in \mathbb{R}$, y_p est une solution particulière et y_h est solution de l’équation homogène.

Démonstration. Soit y_p *une* solution particulière fixée.
Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $y = c.y_h + y_p$ satisfait

$$y' = y_p' + c.y_h' = ay_p + b + c.ay_h = a(y_p + c.y_h) + b = ay + b$$

on a donc "créé" autres solutions.
Inversement, si y est une autre solution, alors $(y - y_p)' = (ay + b) - (ay_p + b) = a(y - y_p)$. Ceci montre que $y - y_p$ est solution de l'équation homogène. Donc $y - y_p = c.\exp(A(s))$ où A est la primitive de a qui s'annule en t_0, voir la proposition précédente. $\square$

Structurellement, l'ensemble des solutions est donc un sous-espace affine de dim. 1 de $C(\mathbb{R})$! Autrement dit : puisque la direction y_h est facile à calculer, il suffit donc de déterminer *une solution particulière* y_p de l'équation linéaire pour connaître toutes les solutions. Pour cela, on utilise une technique qui s'appelle :

1.2.3. Méthode de la variation de la constante

Lemme 1.8. *Soit I un intervalle, $F : I \times I \to \mathbb{R}$, continue et $\mathcal{C}^1$ dans sa deuxième variable. On pose $f(t) :\stackrel{def.}{=} \int_0^t F(s,t)\,ds$. Alors $f \in \mathcal{C}^1(I)$ et :*

$$f'(t) = F(t,t) + \int_0^t \frac{d}{dt} F(s,t)\,ds$$

Démonstration. Posons $G(u,v) = \int_0^u F(s,v)\,ds$. On a $f(t) = G(t,t)$, c'est à dire $f(G(h(t)) = G \circ h(t)$ en posant $h(t) = (t,t)$ En dérivant on obtient

$$f'(t) = \nabla G(h(t)).h'(t) = \nabla G(t,t).\tbinom{1}{1} = G_u(t,t) + G_v(t,t) = F(t,t) + \int_0^t F_y(s,y)|_{y=t}\,ds$$

Dériver sous l'intégrale. Mais ai je le droit ? ? ? La réponse en 2 étapes.

a) Si une suite de fonctions continue (φ_n) converge uniformément vers φ, alors l'intégrale de Riemann $\int_a^b \varphi_n\,dx \to \int_a^b \varphi(x), dx$. Exercice ! Ou relire son cours "suites et séries de fonctions".

b) Soit Φ est de classe C^1 sur $[a,b]$. On l'étend sur $\mathbb{R}$ de façon affine (pour $t > b$, $\Phi(t) = \Phi(b) + (t-b)\Phi'\_(b)$, pareil à gauche de a). Ceci évite des "trous de définition" dans $\varphi_n(x) :\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{n}(\Phi(x + \frac{1}{n}) - \Phi(x))$. On observe que

$$\varphi_n(x) - \Phi'(x) = \tfrac{1}{n} \int_x^{x+\frac{1}{n}} \Phi'(t) - \Phi'(x)\,dt$$

et que, par continuité uniforme de Φ' sur $[a-1, b+1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que $|t - x| < \delta$ implique $|\Phi'(t) - \Phi'(x)| < \varepsilon$. Il suit que φ_n converge uniformément vers $\varphi :\stackrel{\text{def.}}{=} \Phi'$.

Conclusion : si F est $\mathcal{C}^1$ dans la deuxième variable, G_v se calcule "en dérivant sous le signe intégrale". $\square$

On cherche une solution particulière y_p qui satisfait

$$y_p' = a y_p + b \tag{$\star$}$$

Ansatz : On suppose $y_p = c(t) y_h(t)$, où y_h est une solution de l'équation homogène. Alors y_p résout $(\star)$ si, et seulement si :

$$y_p'(t) = c'(t) y_h(t) + c(t) y_h'(t) = a(t) y_p(t) + b(t) = a(t)(\, c(t) y_h(t)\,) + b(t)$$

par le Ansatz. D'autre part, on a $y_h'(t) = a(t) y_h(t)$, ce qui donne

$$c'(t) y_h(t) + \cancel{c(t) a(t) y_h(t)} = \cancel{a(t) c(t) y_h(t)} + b(t) \Leftrightarrow c'(t) y_h(t) = b(t)$$

Si $y_h(t) \neq 0$, on trouve $c'(t) = \frac{b(t)}{y_h(t)}$, en primitivant, cela donne $y_p(t) = c(t) y_h(t)$ donc la solution particulière supposée convient. Pratique : y_h est une exponentielle de (...) donc certainement strictement positive !

Théorème 1.9. *Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$, continues sur un intervalle I et $t_0 \in I$. Alors le problème de Cauchy*

$$y'(t) = a(t) y(t) + b(t) \qquad \textit{avec condition initiale} \qquad y(t_0) = y_0$$

a pour solution unique

$$y(t) :\overset{def.}{=\!=} \underbrace{\exp(\int_{t_0}^{t} a(r)\, dr) y_0}_{y_h} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \exp[\int_{s}^{t} a(r)\, dr] b(s)\, ds}_{y_p}$$

Démonstration. Explication : $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$ est la primitive de a qui s'annule en t_0. Ainsi, la partie homogène, $y_h = \exp(A(t)) y_0$ assure la bonne valeur initiale et satisfait $y_h' = a y_h$. Ensuite, la procédure expliquée ci-dessus nous amène à primitiver c', puis de multiplier avec y_h.

$$\begin{aligned} y_h(t) \int_{t_0}^{t} c'(s)\, ds = y_h(t) \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{y_h(s)}\, ds &= \int_{t_0}^{t} b(s) \exp(-\int_{t_0}^{s} a(r)\, dr). \exp(\int_{t_0}^{t} a(r)\, dr)\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t} \exp(\int_{s}^{t} a(r)\, dr) b(s)\, ds \end{aligned}$$

où on utilise la relation de Châles pour simplifier les deux exponentielles. Pour vérifier l'existence : on utilise le lemme précédent pour re-dériver le y posé dans l'énoncé. La partie y_h étant claire, on se concentre sur y_p :

$$y_p'(t) = \underbrace{\exp\left(\int_{t}^{t} a(r)\, dr\right) .b(t)}_{F(t,t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} a(r)\, dr\right) a(t) b(s)\, ds}_{\frac{dF}{dy}(s,y)|_{y=t}} = b(t) + a(t) y_p(t)$$

pour voir qu'il s'agit bien d'une solution. Unicité : si z est une deuxième solution, alors $w := y - z$ est solution de $w' = a w$ avec $w(t_0) = 0$. Par unicité du problème à variables séparées et le fait que $w = 0$ *est* une solution, on déduit $y = z$. $\square$

1.2.4. Autres méthodes explicites

Substitution

- Pour résoudre : $y' = ay^n + by,\ n \neq 1$. (On suppose $y \neq 0$).
  On pose $z = y^{1-n}$, l'équation devient
  $$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)y^{-n}(ay^n + by) = \underbrace{(1-n)a}_{\tilde{a}} + \underbrace{b(1-n)}_{\tilde{b}}y^{1-n},$$
  on se ramène alors à une équation linéaire : $z' = \tilde{a} + \tilde{b}z$
- Pour résoudre $y' = f(\frac{y}{t})$. On pose $u(t) = \frac{y(t)}{t}$, on dérive :
  $$u'(t) = \frac{y'(t)t - y(t)}{t^2} = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{1}{t}f(\frac{y}{t}) - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{1}{t}f(u(t)) - \frac{1}{t}u(t),$$
  qui est une équation à variables séparées : $g(t) = 1/t$ et $h(u) = f(u) - u$!

Équations exactes

On a le problème suivant :
$$p(t,y) + y'(t)q(t,y) = 0 \tag{E}$$
où $q \neq 0$ (sinon, ce n'est pas une équation différentielle). Si on trouve g tel que $(p,q) = \nabla g$ alors (E) devient $\frac{d}{dt}(g(t,y(t))) = 0$ donc $g(t,y(t)))$ est une constante. Cela donne une solution implicitement définie – existence locale assurée car $q \neq 0$.

Remarque 1.10. Sur un domaine étoilé, une fonction (p,q) est le gradient d'une autre fonction de classe $\mathcal{C}^2$ si, et seulement si, $\frac{d}{dy}p(x,y) = \frac{d}{dx}q(x,y)$ (voir polycopié L2).

Il se peut que (p,q) ne soit pas un gradient, mais s'il existe $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^*$ satisfaisant "(mp, mq) est un gradient", alors on peut résoudre l'équation. On parle d'un facteur exact.

Exemple 1.11. On cherche à résoudre $2y^2 + 2xyy' = 0$. On pose $p(x,y) = 2y^2,\ q(x,y) = 2xy$. On voit que ça ne peut pas être un gradient ($4y \neq 2y$), mais si on trouve $m(x)$ telle que $(\tilde{p}, \tilde{q})$ soit un gradient avec : $\begin{cases} \tilde{p}(x,y) = m(x)2y^2 \\ \tilde{q}(x,y) = m(x)2xy \end{cases}$ on pourra trouver une solution.
Le choix de chercher m comme fonction de x (et pas de y) est arbitraire - on tente, soutenu du fait que les dérivées partielles de (p,q) ne dépendent que de y. Alors
$$\frac{d}{dy}\tilde{p}(x,y) = 4ym(x); \qquad \frac{d}{dx}\tilde{q}(x,y) = 2ym(x) + 2xym'(x)$$
$\frac{d}{dy}\tilde{p}(x,y) = \frac{d}{dx}\tilde{q}(x,y) \Leftrightarrow 4ym(x) = 2ym(x) + 2xym'(x) \Leftrightarrow 2ym(x) - 2xym'(x) = 0$ c'est une équation linéaire homogène que l'on sait résoudre : $m(x) = \exp(\int_0^x 1/xdx) = x$ On prend donc $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (2xy^2, 2x^2y) = \nabla g(x,y)$, alors $g(x,y) = x^2y^2 = y(x)$ donc $y(x)$ satisfait $x^2y^2 = c$ et $y(x) = \pm\frac{c}{x}$

1.3. Théorème d'existence et d'unicité

Cadre : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On s'intéresse à l'existence d'une solution au problème

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On cherche à approcher y par une fonction polygonale par morceaux.

Définition 1.12. Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ une famille de fonctions.
On dit que $\mathcal{F}$ est **uniformément équicontinue** si

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in \mathcal{F} \, \forall x, y \in [a,b] : \; (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Remarque 1.13. a) si $\mathcal{F} = \{f\}$ on retrouve la définition de continuité uniforme ;

b) si $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est finie, cela signifie que chaque f_i est uniformément continue (nécessaire), mais aussi suffisant : il suffit de prendre $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ où δ_i est choisi pour $\varepsilon > 0$ fixé par rapport à la continuité uniforme de f_i.

Exemple 1.14. Soit $\mathcal{F} \leq \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ tel que chaque f satisfait une condition de Lipschitz pour un "équi" unique $L > 0$. Ceci est en particulier vrai si $\|f'(\xi)\| \leq L$ pour tout $\xi \in [a,b]$ et toute fonction $f \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue. En effet, soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout x, y tels que $|x - y| < \delta$, par l'inégalité des accroissements finis on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \int_0^1 \underbrace{\|f'(y + t(y-x))\|}_{\leq L} dt. \underbrace{|x-y|}_{\leq \delta = \frac{\varepsilon}{L}} \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.15 (Arzelà-Ascoli)**.** *Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Alors on a équivalence entre*

a) *D'un coté*
   i) *$\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.*
   ii) *$\mathcal{A}$ est bornée.*

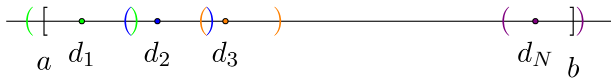
b) *et de l'autre que toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ admet une sous-suite uniformément convergente.*

Remarque 1.16. $\mathcal{A}$ est bornée $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in \mathcal{A}$, $\|f\|_\infty \leq M$. Si on passe de $\mathcal{A}$ à $\overline{\mathcal{A}}$, on a donc une caractérisation de la compacité dans $C([a,b], \mathbb{R})$.

Démonstration. Idée de la preuve $(a) \Rightarrow (b)$:

1. on prend $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **dense** dans $[a,b]$
2. on construit une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge ponctuellement en chaque point d_n. Pour ce faire, on a besoin que $(f_n(d_i))_{n \geq 0}$ soit bornée, d'où l'hypothèse que $\mathcal{A}$ soit bornée.

3. on fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $\delta > 0$ pour qu'il convienne pour tous les f_i. Ainsi il existe un nombre fini de points $d_1, \ldots, d_N$ de la suite dense tels que $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} (d_k - \frac{\delta}{2}; d_k + \frac{\delta}{2})$. Soyons précis : $N = 1 + E((b-a)/\delta)$ où E désigne la partie entière, est possible.



4. Transfert de la propriété de Cauchy de $(f_{\varphi(n)}(d_i))_{n\geq 0}$ sur $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$: soit $x \in [a, b]$ fixé, et $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ comme avant. Fixons d_i tel que $x \in (d_i - \frac{\delta}{2}, d_i + \frac{\delta}{2})$. Alors

$$\begin{aligned}|f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq\ & \underbrace{|f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(m)(d_j)}|}_{\leq \varepsilon \text{ par équicontinuité}} \\ & + \underbrace{|f_{\varphi(m)}(d_j) - f_{\varphi(n)(d_j)}|}_{\substack{\leq \varepsilon \text{ pour } n,m \geq M_i \text{ car} \\ (f_{\varphi(n)}(d_i))_{n\geq 0} \text{ est Cauchy}}} + \underbrace{|f_{\varphi(m)}(d_j) - f_{\varphi(n)(d_j)}|}_{\leq \varepsilon \text{ par équicontinuité}} \leq\ 3\varepsilon,\end{aligned}$$

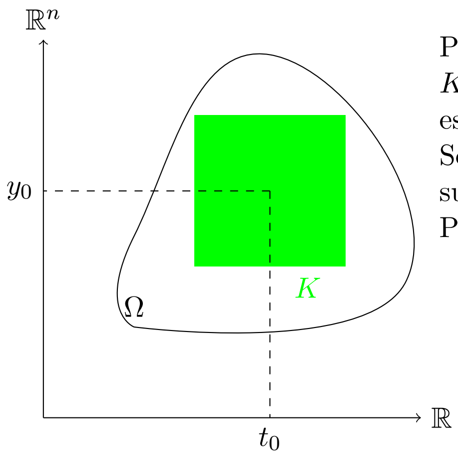
pourvu que $m, n \geq M :\stackrel{\text{def.}}{=\!=} \max(M_1, \ldots M_N)$. Ici il est utile de n'avoir qu'un nombre fini de M_i à considérer ! On voit que $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 1}$ est de Cauchy. Il suit convergence ponctuelle de $(f_{\varphi(n)}(x))_n$. Puisque M a été choisi indépendamment de x, on peut donc laisser $m \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus et récupérer la convergence uniforme en "bootstrap". $\square$

Théorème 1.17 (Théorème de Peano (1886)). *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ouvert, et $(t_0, y_0) \subset \Omega$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue. Alors il existe une solution locale au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $t \in [a, b]$ et $t_0 \in (a, b)$.

Démonstration.



Pour tout Ω ouvert, il existe $[a, b]$ et $R > 0$ tels que $K = [a, b] \times B[y_0, R] \subseteq \Omega$ Sur K, qui est compact, f est bornée. Posons $L = \max\{\|f(t, y)\|, (t, y) \in K\}$. Soit $\varepsilon > 0$, on va construire la fonction polygonale suivante :

Première étape :

a) Calcul de pente : $m_0 = f(t_0, y_0)$
b) approximation affine $p_0(t) = y_0 + m_0(t - t_0)$
c) longueur de pas $t_1 = \sup\{t \in [t_0, b], \forall_s : t_0 \leq s \leq t : \|m_0 - f(s, p_0(s))\| \leq \varepsilon\}$.
d) point final : $y_1 = p(t_1)$.

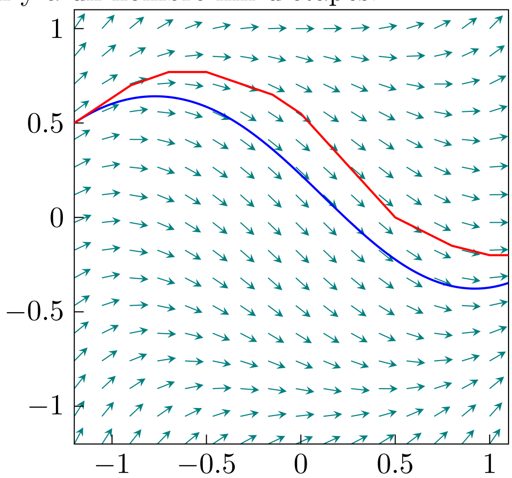
Comme f est continue, $t \mapsto (t, p_0(t))$ aussi, on a $t_1 > t_0$. La longueur de pas est telle que la pente initiale, $m_0 = f(t_0, y_0)$ ne dévie pas trop de celle, $f(s, p_0(s))$, au point estimé $p_0(s)$.
Deuxième étape comme la première :

a) Calcul de pente : $m_1 = f(t_1, y_1)$
b) approximation affine $p_1(t) = y_1 + m_1(t - t_1)$
c) longueur de pas $t_2 = \sup\{t \in [t_1, b], \forall_s : t_1 \leq s \leq t : \|m_1 - f(s, p_1(s))\| \leq \varepsilon\}$.
d) point final : $y_2 = p(t_2)$.

Et ainsi de suite. Montrons que cette procédure s'arrête après un nombre fini d'étapes : c'est à dire qu'il existe N tel que $t_N = b$. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas : dans ce cas, $(t_n)_{n \geq 0}$ est croissante et $t_n \leq b$. Il suit que $(t_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite t^*. Pour $n > k$ on a

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_k\| &\leq \|y_n - y_{n-1}\| + \|y_{n-1} - y_{n-2}\| + \cdots + \|y_{k+1} - y_k\| \\
&\leq \|m_n\||t_n - t_{n-1}| + \|m_{n-1}\||t_{n-1} - t_{n-2}| + \cdots + \|m_{k+1}\||t_{k+1} - t_k| \\
&\leq L|(t_n - t_{n-1}) - (t_{n-1} - t_{n-2}) - \cdots - (t_{k+1} - t_k)| \\
&\leq L|t_n - t_k|
\end{aligned}$$

Cela montre que la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy car $(t_n)_{n \geq 0}$ l'est. Donc $(y_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite y^*. Ainsi, $\varepsilon = \|m_k - f(t_{k+1}, y_{k+1})\| = \|f(t_k, y_k) - f(t_{k+1}, y_{k+1})\| \to 0$ par continuité de f et convergence de $(t_n, y_n)_{n \geq 0}$, ce qui signifie $\varepsilon \to 0$, c'est absurde. Donc il y a un nombre fini d'étapes.



La "vraie solution" (bleue) suit les pentes que le champs de vecteurs $f(t, y)$ indique à tout point. La solution approché (rouge) essaie de faire pareil, mais elle recorrige sa direction que dans les points t_i quand la différence entre la direction prise et la direction que le champ de vecteurs suggère devient trop grand (contrôlé par ε).

Reste à montrer que l'on obtient une solution valable si $\varepsilon \to 0$. Posons

$$\mathcal{A} = \{y_\varepsilon, \varepsilon \in (0, 1]\}.$$

Alors on a

1. y'_ε est est constante par morceaux. Suivre le trait polygonal de (t_0, y_0) à $(t, y_\varepsilon(t))$ revient à fixer k avec $t \in [t_k, t_{k+1}]$ et de calculer

$$y_\varepsilon(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} (t_{i+1} - t_i) m_i + (t - t_k) m_k = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'_\varepsilon(\xi) d\xi \qquad (1.1)$$

Il suit que $\|y_\varepsilon(t)\| \leq \|y_0\| + (b - a)L$ car $y'_\varepsilon \in \{m_0, \ldots, m_N\}$ et $\|m_i\| \leq L$. Ceci montre que $\mathcal{A}$ est bornée.

2. Montrons que $\mathcal{A}$ est équicontinue on utilise (1.1) et la relation de Châles :

$$\|y_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(s)\| = \| \int_s^t y'_\varepsilon(r)\, dr\| \leq (t-s)L$$

A nouveau, $\|y'_\varepsilon(r)\| \leq L$ comme ci-dessus. Il suit que $\mathcal{A}$ est equi-L-Lipschitz, donc uniformément équicontinue (il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$).

On peut donc appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli : on extrait une sous-suite convergente de (y_n) en prenant :$\forall(\varepsilon_n), \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ de façon que $\|y_{\varepsilon_n}\|_\infty \to y \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$.

$$\|y(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds\| = \|y(t) - y_{\varepsilon_n}(t) - \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - y'_{\varepsilon_n}(s)]ds\|$$

$$\leq \underbrace{\|y(t) - y_{\varepsilon_n}(t)\|}_{①} + \underbrace{\| \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, y_{\varepsilon_n}(s))]ds\|}_{②} + \underbrace{\| \int_{t_0}^t [f(s, y_n(s)) - y'_{\varepsilon_n}(s)]ds\|}_{③}$$

1. ① : tend vers 0 par convergence uniforme ;
2. comme f est continue sur K (un compact), donc uniformément continue et que y_{ε_n} tend uniformément vers y, ② tend vers 0.
3. ③$= \varepsilon_n(t - t_0)$ tend vers 0 car ε_n tend vers 0.

On a montré que $\|y(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds\| = 0$. Donc $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds$. En tant que primitive de la fonction continue $f(s, y(s))$ le coté droit est même $\mathcal{C}^1$, le coté gauche donc aussi. En dérivant les deux cotés on obtient $y'(t) = f(t, y(t))$ tandis que la valeur initiale suit en évaluant en $t = t_0$. □

1.3.1. Théorèmes d'unicité

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ouvert, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue.

Définition 1.18. On dit que f est **Lipschitz par rapport à la deuxième variable** s'il existe $L > 0$ tel que $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L.\|y - z\|$, $\forall (t, y), (t, z) \in \Omega$. On dit alors que f est **globalement Lipschitz** en la deuxième variable.
On dit que f est **localement Lipschitz dans la deuxième variable** si pour tout $(t, y) \in \Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (t, y) sur lequel f est (globalement) Lipschitz en la deuxième variable sur $\mathcal{U}$ (à la place de Ω).

Exemple 1.19. Soit $f(t, x) = t + \sqrt{x}$ sur $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Alors

$$|f(t, y) - f(t, z)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{z}\right| = \tfrac{|x-z|}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}.$$

Tant que $x, z \geq \varepsilon$, f est Lipschitz avec constante $L = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Mais pour deux points de Ω, par exemple si on choisit $z = 4x$, on a

$$|f(t, y) - f(t, z)| = |x - z| \times \tfrac{1}{3\sqrt{x}}$$

et le facteur $\frac{1}{3\sqrt{x}}$ n'est clairement pas borné par un $L > 0$ quelconque, puisque x peut s'approcher à zéro autant que l'on veut. Ainsi, f est globalement Lipschitz sur $\mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$, mais pas globalement sur Ω.

Théorème 1.20. *Unicité de la solution Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz en y.*
Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ *admet* ***au plus une solution***

Démonstration. Remarque : le théorème n'énonce pas existence. La logique de la preuve est : "s'il y a deux solutions, alors elles sont égales".

— *Étape 1 :* Soit I un intervalle, $t_0 \in I$ et y, z deux solutions sur I. On veut montrer que $y = z$.

$$y(t)-z(t) = y_0+\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds-(y_0+\int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds) = \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s))-f(s, z(s))\, ds$$

Comme f est localement Lipschitzienne, il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \Omega$ de (t_0, y_0) sur lequel f est Lipschitzienne en y. Par continuité des fonctions $t \mapsto f(t, y(t))$ et $t \mapsto f(t, z(t))$, il existe un $\delta > 0$ tel que $(|t - t_0| < \delta) \Rightarrow (t, y(t)), (t, z(t)) \in \mathcal{U})$. Pour $|t - t_0| < \delta$ il suit

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| = \| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s)) ds\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \\ &\leq L|t - t_0| \max_{t_0 \leq \delta \leq t} \|y(s) - z(s)\| \\ &\leq L.\delta. \max_{t_0 \leq \delta \leq t} \|y(s) - z(s)\| \end{aligned}$$

Quitte à diminuer δ davantage, on peut supposer que $\delta.L < 1$. En prenant le maximum à gauche et à droite sur $[t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2]$ (ou un autre intervalle fermé dans $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$) on obtient $\max_{|t-t_0|\leq\delta/2} |y - z| \leq \delta.L \max_{|t-t_0|\leq\delta/2} |y - z|$. Et comme $\delta.L < 1$ cela implique que $\max_{|t-t_0|\leq\delta/2} |y - z| = 0$, on a démontré que $y = z$ sur $[t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2]$.

— *Étape 2 :* Posons $t_1 = \sup\{t \geq t_0 : \forall s \in [t_0; t],\ y(s) = z(s)\}$. Deux possibilités :

- soit $t_1 < \sup(I)$. Par continuité $y(t_1) = z(t_1)$ On a donc un "nouveau" problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t_1, x) \\ x(t_1) = y(t_1) \end{cases}$ qui admet deux solutions y et z, mais par l'étape 1 de la preuve, comme $(t_1, y(t_1)) \in \Omega$ et f localement Lipschitzienne, on a $y = z$ sur $[t_1; t_1 + \delta']$ ce qui contredit la construction de t_1 comme le sup tel que les solutions sont égales.
- soit $t_1 \geq \sup I$, dans ce cas, on a bien $y = z$ sur I. □

Solutions maximales ou non-prolongeables

Définition 1.21. Une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $(\star)$ est dite **maximale**, ou non-prolongeable, s'il n'existe pas d'intervalle J tel que $I \subsetneq J$, sur lequel le problème de Cauchy admet une solution.
On dit qu'une solution est **globale** si elle existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Toute solution globale est maximale (évident), mais la reciproque est fausse.

Exemple 1.22. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ a pour solution $y(t) = \tan(t)$ sur $(-\pi/2; \pi/2)$. La solution n'est pas définie en $\pi/2$, d'ailleurs $(-\pi/2; \pi/2)$ est l'intervalle connexe maximal que l'on peut avoir, car évidemment, $y(t)$ n'est pas défini en tout point $t = \pi/2 + k\pi$. Ainsi, y n'est pas une solution globale.

Proposition 1.23. *On suppose qu'il existe localement une solution autour de tout point initial $(t_1, y_1) \in \Omega$. Si φ est solution du problème de Cauchy $(\star)$, alors il existe un prolongement maximal.*

Démonstration. Soit φ une solution de $(\star)$ que l'on fixe. On cherche à l'étendre de façon maximale. Pour deux solutions y et $\tilde{y}$ définies respectivement sur J et $\tilde{J}$, on définit la relation d'ordre partiel $y \leq \tilde{y}$ si $J \subseteq \tilde{J}$. Alors $\tilde{y}|_J = y$

Soit $\mathfrak{M} = \{z \text{ solution } : \varphi \leq z\}$. Ce sont donc toutes les solutions définies "plus largement" que le φ de départ. Soit $\mathfrak{C} = \{z_\alpha, \alpha \in A\}$ une chaîne croissante (sous partie de $\mathfrak{M}$ totalement ordonnée) de $\mathfrak{M}$. On appelle J_α le domaine de la solution z_α.

Soit $K = \cup_{\alpha \in A} J_\alpha$ et $z : \begin{cases} K \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto z_\alpha(t) \ si \ t \in J_\alpha \end{cases}$. Cette fonction est bien définie et $z \geq z_\alpha \ \forall \alpha \in A$, donc z est l'élément maximal pour $\mathfrak{C}$ Par le lemme de Zorn [*] il existe un élément maximal de $\mathfrak{M}$, c'est à dire une solution maximale qui prolonge φ. $\square$

Remarque 1.24. Si y est une solution maximale de $(\star)$ sur un intervalle I alors I est nécessairement ouvert. En effet : supposons y solution sur $I = (a; b]$, alors "par extension locale", il existe un $\varepsilon > 0$ tel que y soit solution sur $(a; b + \varepsilon)$.

Théorème 1.25. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ donné et on suppose existence et unicité du problème de Cauchy $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$ dans un invervalle I autour de t_0.*
Soit y la solution donnée sur un intervalle I borné autour de t_0 . Alors y est prolongeable (ou non-maximale) si, et seulement si, Ω contient un compact K tel que le graphe $\Gamma_y = \{(t, y(t));\ t \in I\}$ est inclus dans K.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$: On suppose la solution prolongeable, il existe donc un intervalle J, $I \subsetneq J$ tel que y est solution sur J. $I \subsetneq J \Rightarrow \overline{I} \subset J$ or I est borné donc $\overline{I}$ est compact

*. (pour appliquer le lemme de Zorn, il n'est explicitement pas nécessaire que z appartienne à $\mathfrak{C}$!)

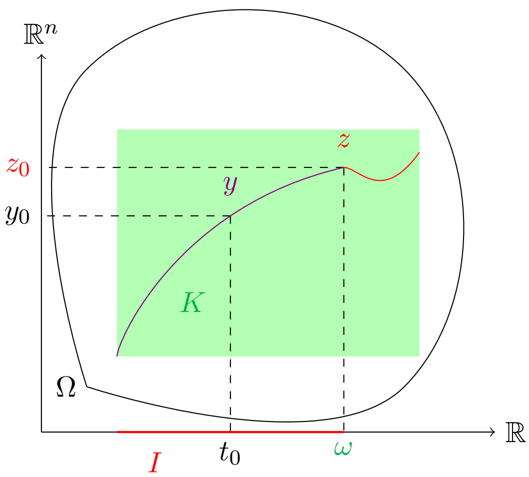
(fermé borné). Comme y est continue, l'image d'un compact par une application continue est un compact donc $y(\overline{I})$ est compact. Le produit de compact est compact donc $\overline{I} \times y(\overline{I})$ est compact, et $\Gamma_y \subset \overline{I} \times y(\overline{I}) \subset \Omega$

$\boxed{\Leftarrow}$: On suppose qu'il existe un compact K tel que $\Gamma_y \subset K \subset \Omega$. Or f est continue donc $f(K)$ est compact. Il suit que y' est borné sur K car $y'(t) = f(t, y(t))$ satisfait $\max_I |y'| \leq \max_K \|f\| := L$. Par l'inégalité des accroissement finis, y est donc L-Lipschitz.

On pose $\omega = \sup(I)$. Soit (t_n) une suite de I qui converge vers ω, alors (t_n) est Cauchy, et par conséquent $y(t_n)$ est de Cauchy car y est L-Lipschitzienne, donc $y(t_n)$ converge vers une limite z_0. Cette limite ne dépend pas de la suite (t_n) : si (s_n) converge vers ω, alors $\|y(s_n) - y(t_n)\| \leq L|s_n - t_n| \to 0$. On résout alors un nouveau problème de Cauchy,

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(\omega) = z_0 \end{cases}$$

ce qui permet de prolonger la solution y par une solution égale à y si $t \in I$ et z si $t \in \overline{I}$. En effet, la fonction "recollé" est continue par construction de z_0, puis y et z sont $\mathcal{C}^1$. Seul la continuité des dérivées au "point de recollement" est à discuter. La dérivée de z en ω est $f(\omega, z(\omega)) = f(\omega, z_0) = \lim_n f(t_n, y(t_n))$ ce qui montre que la fonction recollé est $\mathcal{C}^1$ et une solution sur l'intervalle agrandi.



□

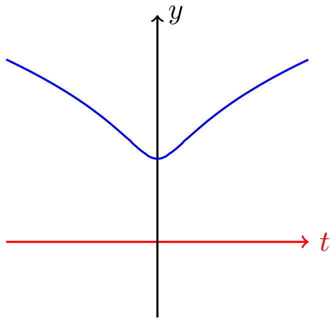
Exemple 1.26. a) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ "définie partout". Alors $y : I \to \mathbb{R}^d$ est maximale si et seulement si $\lim_{t \to \inf(I)} \|y(t)\| = +\infty$ et $\lim_{t \to \sup(I)} \|y(t)\| = +\infty$. Revenons concrètement à l'exemple 1.22, qui illustre bien le résultat : soit la solution y est prolongeable, soit elle quitte tous les compacts du domaine de f (ici, domaine$(f) = \mathbb{R}^2$ – quitter tous les compacts de $\mathbb{R}^2$ signifie alors la solution "explose" (vers ∞). Si on trouve la solution $y(t) = \tan(t)$ disons sur $[-a, a]$ avec $a < \pi/2$, la solution reste bornée, donc son graphe dans un comapct de $\mathbb{R}^2$. Par contre, pas moyen de prolonger au-delà de $(\pi/2, \pi/2)$ car la solution y explose.

b) Par contre, si f est définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la solution peut cesser d'exister lorsque la solution s'apprête à "toucher le bord". Rappelons qu'un compact K inclus dans un ouvert Ω a une distance strictement positive au bord de

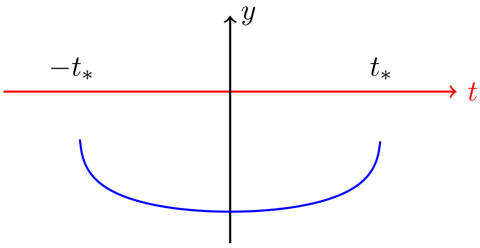
Ω. "Toucher le bord" veut donc dire : quitter tous les compacts de Ω ! Exemple explicit :

Soit $y' = f(t, y) = t/y^4$ avec $y(0) = y_0$ (donc $t_0 = 0$). Cette fonction f est définie sur $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On a dessiné en rouge le bord de Ω.

i) Pour $y_0 \geq 0$, la solution $y(t) = \sqrt[5]{5/2t^2 + y_0^5}$ ne s'annule jamais (c'est à dire : son graphe reste dans Ω), n'explose pas et existe donc en tout temps : elle est globale.



ii) Mais si $y_0 < 0$, la solution $y(t) = -\sqrt[5]{|y_0|^5 - 5/2t^2}$ définie proche de l'origine "touche" la ligne $y = 0$ en un temps fini t_* :



son graphe quitterait donc Ω ! Est-ce vraiment un problème ? Observons que $y'(t) = -5t(|y_0|^5 - 5/2t^2)^{-4/5}$ explose quand $t \to t_*-$. Quoi qu'on fasse pour définir y sur $[t_*, t_* + \varepsilon)$, y ne sera pas dérivable sur $[0, t_* + \varepsilon)$, car elle sera non-dérivable en t_*. Il ne peut donc pas s'agir d'une "solution". On voit donc que la solution existe sur $(-t_*, t_*)$ seulement et s'éteint en $\pm t_*$, comme le théorème le prédit.

Les itérations successives de Picard-Lindelöf

Un peu d'histoire... Peano montre qu'il existe au moins une solution locale au problème de Cauchy en 1886 ; en 1887 Lipschitz montre qu'une fonction globalement Lipschitzienne dans sa deuxième variable admet au plus une solution, puis en 1893/1894, Picard et Lindelöf montrent que : si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est continue et globalement Lipschitzienne en

y, (Ω ouvert), alors la suite d'itérations successives :

$$\begin{cases} y_0(t) & \stackrel{\text{def.}}{:=} y_0 \\ y_{n+1}(t) & \stackrel{\text{def.}}{:=} y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds \end{cases}$$

converge uniformément sur tout intervalle compact $[a, b]$ vers y, la solution du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$. Cette solution est le point fixe de l'application T défini par

$$(Tx)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Démonstration. On veut montrer que la suite ainsi définie converge. On va montrer que $\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}$ Par hypothèse

$$\exists L > 0 \text{ tel que } \forall (t, a), (t, b) \in \Omega : \ \|f(t, a) - f(t, b)\| \leq L\|a - b\|$$

Il suit que

$$\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))\|\, ds \leq L \int_{t_0}^{t} \|y_n(s) - y_{n-1}(s)\|\, ds$$

On raisonne par récurrence sur n.

- pour $n = 1$ on a $\|y_1(t) - y_0(t)\| \leq L \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_0(s)\| ds \leq L.|t - t_0|$
- On suppose la proposition $\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \frac{L^n(t-t_0)^n}{n!}$ vraie au rang n.
- Au rang $n + 1$:

$$\|y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)\| \leq L \int_{t_0}^{t} \|y_{n+1}(s) - y_n(s)\|\, ds \leq L \int_{t_0}^{t} \frac{L^n|s - t_0|^n}{n!}\, ds = \frac{L^{n+1}|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ce qui signifie que $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!} \leq \exp(L|t - t_0|)$. Par conséquent, la suite $\sum_{n=1}^{\infty}(y_{n+1} - y_n)$ converge normalement sur tout $[a, b] \in \mathbb{R}$. Par télescopage

$$y_n = y_0 + \sum_{j=1}^{n-1}(y_j - y_{j-1})$$

ce qui montre que (y_n) converge uniformément sur tout $[a, b]$. On pose $y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t)$. Alors

$$y(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds.$$

Puisque (y_n) converge uniformément et f est Lipschitz dans sa deuxième variable on peut intervertir intégrale et limite :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, y_n(s))\, ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

Alors une fabuleuse auto-amélioration démarre :

1. y est continue en tant que limite uniforme des (y_n) qui sont continues.
2. $s \mapsto f(s, y(s))$ est donc continue, car f est continue.
3. y est une primitive d'une fonction continue, donc $y \in \mathcal{C}^1$!

On peut donc dériver la formule intégrale et obtient $y'(t) = f(t, y(t))$, et $y(t_0) = y_0$. $\square$

Remarque 1.27. L'itération de Picard-Lindelöf s'applique si f est continue sur $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et si $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue. Pour tout $[a, b]$ et K tels que $[a, b] \times K \subseteq \Omega$ on a alors par accroissements finis : $L = \max_{[a,b]\times K} \|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\| < \infty$.

Exemple 1.28. Soit $f(t, y) = A.y$ où A est une matrice de réels fixée. On a alors

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= y_0 \\
y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} A.y_0 \, ds = y_0 + Ay_0(t - t_0) \\
y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} (Ay_0 + A^2 y_0(s - t_0)) \, ds = y_0 + Ay_0(t - t_0) + A^2 y_0 \frac{(t - t_0)^2}{2} \\
&\dots \\
y_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} A^k y_0 \frac{(t - t_0)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \exp(A(t - t_0)).y_0$ On a une solution explicite au système $y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$. Encore faut il calculer $\exp(s.A)$ ... ou pas !

Premier cas : A est diagonalisable :
Soit $\lambda_i v_i = Av_i$ et $U = \big(v_1| \dots |v_n\big)$. Alors U est une matrice de passage qui satisfait $A = UDU^{-1}$ (avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$), ce qui donne $A^n = U^n DU^{n-1}$ et donc $\exp(sA) = U \exp(sD)U^{-1}$. Clairement,

$$\exp(sD) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 s} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n s} \end{pmatrix}$$

Si on pose $y_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ on a alors la solution $\boxed{y(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp((t - t_0)\lambda_k).v_k}$ Ce qui veut dire : pas besoin de calculer l'exponentielle, on peut donner toutes les solutions homogènes juste avec les valeurs / vecteurs propres.

Second cas : A n'est pas diagonalisable Pour toute valeur propre λ de multiplicité algébrique m, on calcule une base de l'espace caractéristique. En pratique, on commence

par $\ker(A-\lambda)$. Pour tout vecteur propre v on résout $(A-\lambda)w = v$, puis $(A-\lambda)z = w$ etc ...
Soit $\{v_1^{(\lambda)}, \dots, v_m^{(\lambda)}\}$ une base de l'espace caractéristique ainsi obtenue. On pose pour $0 \le \ell \le m-1$

$$y_\ell^{(\lambda)}(t) \overset{\text{def.}}{:=} \exp(\lambda t) \sum_{k=0}^{\ell} \frac{t^k (A-\lambda)^k}{k!} v_j^{(\lambda)}$$

Alors on a m solutions $y_0^{(\lambda)}(t), .., y_{m-1}^{(\lambda)}(t)$. Au total, on trouvera donc n solutions, si A est de taille $n \times n$.

Remarque 1.29. Le problème matriciel linéaire $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, avec $A : [a;b] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ n'a PAS pour solution $\varphi(t) = \exp(\int_{t_0}^t A(s)ds) y_0$! ! En effet

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \frac{1}{h} \exp(\int_{t_0}^{t+h} A(s)\,ds) - \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds)$$

mais

$$\exp(\int_{t_0}^{t+h} A(s)\,ds) \neq \exp(\int_{t_0}^{t} A(s) ds). \exp(\int_{t}^{t+h} A(s)\,ds)$$

si les $A(s)$ ne commutent pas pour tout $s \in [t_0, t]$. Au résultat, la dérivée de φ existe bien, mais ne vaut pas $A(t)\varphi(t)$!
Par exemple pour $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ on peut calculer y et φ explicitement. Exercice !

Théorème 1.30. *Soient I un intervalle et $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues. On considère le problème*

$$(\star) \qquad \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*a) Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ le problème de Cauchy $(\star)$ admet **une solution unique**.*
*b) si $b(t) = 0$ $\forall t \in I$, l'ensemble des solutions L_H de l'équation (homogène) est un **espace vectoriel de dimension n***
c) Pour $1 \le k \le n$ et $\psi_1, \dots, \psi_k \in L_H$ les propositions suivantes sont équivalentes :
  - *i) $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ est une famille **libre** dans L_H*
  - *ii) il existe $t_0 \in I$ tel que $\{\psi_1(t_0), \dots, \psi_k(t_0)\}$ soit une famille **libre** dans $\mathbb{K}^n$*
  - *iii) pour tout $t \in I$, $\{\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)\}$ est une famille **libre** dans $\mathbb{K}^n$*

Démonstration.

a) L'équation s'écrit comme $y' = f(t,y)$, $\quad y(t_0) = y_0$ avec $f(t,y) = A(t)y(t) + b(t)$. Comme f est continue, on est assuré de l'existence d'une solution. De plus $\|f(t,y) - f(t,z)\| = \|A(t)(y-z)\| \le \max_{t \in I} \|A(t)\| \|y-z\|$ (avec la norme matricielle induite pour A). Il suit que f est Lipschitzienne en y, d'où l'unicité de la solution sur I.

b) * $0 \in L_H$;

* soit $\psi, \varphi \in L_H$; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a :

$$(\alpha\psi + \beta\varphi)' = \alpha\psi' + \beta\varphi' = \alpha(A(.)\psi(.)) + \beta(A(.)\varphi(.)) = A(.)(\alpha\psi + \beta\varphi) \in L_H$$

donc L_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$

c) Pour démontrer $\dim(L_H) = n$ on va d'abord montrer c). On a immédiatement $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Reste à montrer $i) \Rightarrow iii)$. Par contraposée. On suppose $\forall t \in I$ que $\{\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)\}$ est une famille liée. En particulier, soit t_0 tel que $\{\psi_1(t_0), \ldots, \psi_k(t_0)\}$ est liée. Cela implique qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i(t_0) = 0$. Posons $\psi(t) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i(t)$. Or $\psi(t_0) = 0$ résout $(\star)$ avec la condition initiale $y_0 = 0$. Par unicité de la solution, et le fait que la fonction nulle est aussi une solution à ce problème on a $\psi(t) = 0 \forall t \in I$ donc $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ est liée dans L_H.

Calcul de la dimension de L_H : Soit $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ Par a) il existe y_j tel que $y_j' = A(.)y_j$ et $y_j(t_0) = e_j$. De c) on déduit que $\{y_j, 1 \leq j \leq n\}$ est libre, donc $\dim(L_H) \geq n$. Par c) si $\{y_j, 1 \leq j \leq n\} \subseteq L_H$ avec $l > n$ alors la famille est liée donc $\dim(L_H) \leq n$.

□

Définition 1.31. Soit $(\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ une base de L_H. Alors on appelle $\{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ un **système fondamental.**

On pose $\Phi(t) = (\varphi_1 | \ldots | \varphi_n) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ la matrice du système fondamental.
y est solution du problème homogène signifie que $y(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, où les c_i sont des scalaires. Ce qui équivaut à $y(t) = \Phi(t).c$ en posant $c = (c_1, \ldots, c_n)^t$. Vu que Φ est dérivable coordonnée par coordonnée, donc dérivable, et on a :

$$\Phi(t) = \Big(\varphi_1'(t) | \ldots | \varphi_n'(t)\Big) = \Big(A(t)\varphi_1(t)) | \ldots | A(t)\varphi_n(t)\Big).$$

Ceci montre que la matrice d'un système fondamental satisfait l'équation $\boxed{\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)}$.

Exemple 1.32. Soit le problème $\begin{cases} y_1' = -\omega y_2 \\ y_2' = \omega y_1 \end{cases}$ En dérivant la première équation, on obtient : $y_1'' = -\omega y_2' = -\omega^2 y_1$ On résout cette équation : le polynôme caractéristique est $X^2 + \omega^2$, qui a pour solutions $i\omega, -i\omega$, ce qui nous donne deux solutions comme combinaisons linéaires de sin et cos :

$$y_1(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = \delta \sin(\omega t) + \gamma \cos(\omega t).$$

Reste à "comparer" les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. En effet, $y_1' = -\omega y_2$ impose $\gamma = -\alpha$ et $-\beta = \delta$.

Mais d'autre part, on peut réécrire le problème sous la forme $z' = Az$, avec $z = (y_1, y_2)^t$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\varphi_a(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$ et $\varphi_b(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$ sont deux solutions du problème matriciel. Or $\varphi_a(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi_b(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, par le théorème ils forment un système fondamental, et toute solution φ est de la forme

$$\varphi(t) = a\varphi_a(t) + b\varphi_b(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) \\ a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t) & b\sin(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Ceci coïncide avec le calcul “à la main” du haut. On remarque aussi que $\det(\Phi(0)) = -1$ et $\det(\Phi(t)) = -1$, ce qui illustre ce qu'on a vu dans le théorème : si la famille est libre en un point t_0, ici $t_0 = 0$, elle est libre pour tout t.

Variation de la constante reloaded - cas matriciel

Soit le problème $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)(\star)$
<u>Ansatz</u> : on suppose qu'il existe une solution particulière de la forme $y_p(t) = \Phi(t)c(t)$, on a donc : $y_p'(t) = A(t)y_p(t) + b(t)$. D'autre part, en dérivant ce $y_p(t)$ supposé, on a : $y_p'(t) = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$. Or $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, en remplaçant dans l'expression, on a :

$$y_p'(t) = \underline{A(t)\Phi(t)c(t)} + \Phi(t)c'(t) = \underline{A(t)\Phi(t)c(t)} + b(t)$$

c'est à dire : $\Phi(t)c'(t) = b(t)$. En primitivant $c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$ on trouve $c(t)$, puis $y_p(t)$ et enfin, toutes les solutions de $(\star)$ seront données par

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + \Phi(t)c, \qquad c \in \mathbb{R}^n}.$$

Astuce calcul : ne pas inverser Φ mais résoudre le problème linaire $\Phi.x = b$ et poser $c'(t) = x(t)$.

1.3.2. Application aux équations linéaires à coefficients constants

Résolution du problème

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0 \\ y(t_i) = y_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y'(t) = A.Y(t) \\ Y(t_0) = (y_0, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

L'idée est de se passer de calculer les vecteurs propres et de donner “directement” la solution. A ce fin, on pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X_k$, le polynôme caractéristique. On écrira $D = \frac{d}{dt}$ et formellement l'équation différentielle devient $P(D)y = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = 0$

Lemme 1.33. *On a les propriétés suivantes sur les objets $P(D)$ définis ci-dessus :*

1. *si $P = P_1 + P_2$ dans $\mathbb{C}[X]$, alors $P(D)f = P_1(D)f + P_2(D)f$. Ceci est immédiat.*

2. si $Q = P_1P_2$ dans $\mathbb{C}[X]$ alors $Q(D)f = P_1(D)[P_2(D)f]$. Ceci nécessite une preuve.

Démonstration. Preuve de (2) Soient $P_1(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k ; P_2(X) = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec (a_n) et (b_n) deux suites finies ($N = \max\{n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ ou $b_n \neq 0\}$)

$$Q(X) = P_1P_2(X) = \sum_k c_k X^k \qquad \text{avec} \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Alors

$$\begin{aligned} Q(D)f = \sum_k c_k f^{(k)} &= \sum_k \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} f^{(k)} \\ &= \sum_j \sum_{k\geq j} a_j b_{k-j} (\frac{d}{dt})^j f^{(k-j)} \\ &= \sum_j a_j (\frac{d}{dt})^j \sum_{k\geq j} b_j f^{(k-j)} \\ &= P_1(D)[P_2(D)f] = P_1P_2(D)f = P_2[P_1(D)f] \end{aligned}$$

□

Lemme 1.34. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = \sum_k a_k X^k$; $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $P(D)e^{\lambda t} = \sum a_k \lambda^k e^{\lambda t} = e^{\lambda t} P(\lambda)$ On a donc*

$$\boxed{P(D)e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = 0}$$

Dans ce cas, $y(t) = e^{\lambda t}$ est une solution au problème homogène $P(D)y = 0$.

Cas diagonalisable

Théorème 1.35. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n scindé en n racines simples $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$ forme un système fondamental pour le problème $P(D)y = 0$.*

Démonstration. $\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t}$ est solution de $P(D)y = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$ Ce qui signifie que $\Phi_k(t) = (\varphi_k, \varphi_k', \dots, \varphi_k^{(n-1)})$ est solution de $\Phi' = A\Phi$ Cette équation linéaire admet un système fondamental de n solutions, il suffit dont de montrer l'indépendance des Φ_k On écrit la matrice des solutions

$$\Phi = \Big(\Phi_1 | \dots | \Phi_n\Big) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

On se place en $t = 0$ puisqu'on sait que l'indépendance en un point équivaut à l'indépendance en tout point.

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On reconnaît un matrice de Van Der Monde, qui est inversible car les λ_i sont deux à deux distincts. Donc les Φ_k sont bien linéairement indépendants, et les φ_k aussi. $\square$

Remarque 1.36. Si les λ_i sont réels, on a une preuve analytique simple : on ordonne les λ_i tels que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. On forme une combinaison linéaires des solutions : $\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(t) = 0$ et on multiplie par $e^{-\lambda_1 t}$, on obtient $\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(t)e^{-\lambda_1 t} = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i\varphi_i(t)$, puis on fait tendre t vers $+\infty$: $\sum_{i=2}^n a_i\varphi_i(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il reste $a_1 = 0$. Par récurrence, on obtient $a_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Exemple 1.37. $y^{(3)} - 2y^2 + y' - 2y = 0 \qquad (\star)$. En identifiant au problème $P(D)y = 0$ on a $P(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2 = 0$. On observe que 2 est racine de P, puis en faisant la division euclidienne de P par $(X - 2)$ on obtient $P(X) = (X - 2)(X^2 + 1) = (X - 2)(X - i)(X + i)$ Donc P est bien scindé à racines simples, et on a un système fondamental $\{e^{2t}, e^{-it}, e^{it}\}$. Mais on préfère se ramener à un système réel. On observe que l'application $(x, y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$ est inversible, en l'appliquant à (e^{it}, e^{-it}) on obtient $(\cos(t), \sin(t))$. Donc un autre système fondamental pour le problème $(\star)$, réel cette fois, est $\{e^{2t}, \cos(t), \sin(t)\}$, ainsi les solutions sont de la forme : $y(t) = \alpha e^{2t} + \beta\cos(t) + \gamma\sin(t)$, où α, β, γ sont réels.

Cas Général (du système homogène)

Lemme 1.38 (Lemme 1)**.** *Soient $\lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ Alors* $\boxed{(D - \lambda)^k(e^{\lambda t}f) = e^{\lambda t}f^{(k)}(t)}$

Démonstration. Par récurrence sur k. Pour $k = 1$ on a

$$(D - \lambda)(e^{\lambda t}f) = [e^{\lambda t}f(t)]' - \lambda e^{\lambda t}f(t) = e^{\lambda t}f'(t).$$

Supposons la proposition vraie au rang k : $(D - \lambda)^k(e^{\lambda t}f) = e^{\lambda t}f^{(k)}(t)$; au rang $k + 1$ on a alors

$$\begin{aligned}(D - \lambda)^{k+1}(e^{\lambda t}f) &= (D - \lambda) \quad \underbrace{(D - \lambda)^k(e^{\lambda t}f(t))}_{=e^{\lambda t}f^{(k)}(t) \text{ par hypo. de rec.}} \\ &= D(e^{\lambda t}f^{(k)}(t)) - \lambda(e^{\lambda t}f^{(k)}(t)) = e^{\lambda t}f^{(k+1)}(t)\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 1.39 (Lemme 2)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $P(\lambda) \neq 0$. Si g est un polynôme d'ordre n de $\mathbb{C}[X]$ alors* $\boxed{P(D)[g(t)e^{\lambda t}] = h(t)e^{\lambda t}}$ *où $h \in \mathbb{C}[X]$;* $\deg(h) = n$

Démonstration. On pose $P(X) = \sum c_k(X-\lambda)^k$. Comme $P(\lambda) \neq 0$ on a $c_0 \neq 0$. Par le Lemme 1 on a $P(D)[g(t)e^{\lambda t}] = \sum c_k(D-\lambda)^k[g(t)e^{\lambda t}] = \sum c_k g^{(k)}(t)e^{\lambda t}$. On pose $h(t) = \sum c_k g^{(k)}(t)$, c'est bien un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. De plus, comme $c_0 \neq 0$, on a $\deg(g) = \deg(h) = n$. □

Théorème 1.40. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses racines, de multiplicité, respectivement, $m_1, \ldots m_r$ Alors l'équation différentielle $P(D)y = 0$ admet un système fondamental de la forme*

$$\boxed{\{t^j e^{\lambda_k t}\ ; \quad j = 0, \ldots, m_k - 1\ ;\ k = 1, \ldots, r\}}$$

Démonstration. Étape 1 : on montre que $t^j e^{\lambda_k t}$ est bien solution de $P(D)y = 0$. Pour $k = 1, \ldots, r$ on écrit $P(X) = (X-\lambda_k)^{m_k} Q_k(X)$.

$$\begin{aligned}
P(D)[t^j e^{\lambda_k t}] &= (D-\lambda_k)^{m_k}[Q_k(D)(t^j e^{\lambda_k t})] \\
&= Q_k(D)[(D-\lambda_k)^{m_k}(t^j e^{\lambda_k t})] \\
&= Q_k(D) \quad \underbrace{((\frac{d}{dt})^{m_k} t^j)e^{\lambda_k t}}_{\text{Lemme 2 avec } g(t)=t^j} \qquad\qquad \text{or } j \leq m_k - 1 \Rightarrow (\frac{d}{dt})^{m_k} = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{j,k}(t) = t^j e^{\lambda_k t}$ est bien solution de $P(D)y = 0$. On a alors n solutions (la somme des multiplicités des racines).
Étape 2. Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes : Supposons

$$\forall t \qquad 0 = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_k-1} \mu_{j,k}\varphi_{j,k}(t)$$

une combinaison linéaire des $\varphi_{j,k}$. On va montrer que les coefficients $\mu_{j,k}$ sont tous nuls. On pose $g_k(t) = \sum_{j=0}^{m_k-1} \mu_{j,k} t^j$, $g_k \in \mathbb{C}[X]$ et on a $\deg(g_k) \leq m_k - 1$. Alors

$$0 = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_k-1} \mu_{j,k}\varphi_{j,k}(t) = \sum_{k=0}^{r} g_k(t)e^{\lambda_k t}$$

Supposons par l'absurde que le coefficients $\mu_{j,k}$ ne sont pas tous nuls. Quitte à permuter les λ_k et réduire r si besoin, on peut alors supposer que aucun des polynômes g_k n'est identiquement nul. On applique $(D-\lambda_r)^{m_r}$ à $\sum_{k=0}^{r} g_k(t)e^{\lambda_k t}$

$$(D-\lambda_r)^{m_r}\Big(\sum_{k=0}^{r} g_k(t)e^{\lambda_k t}\Big) = \underbrace{\sum_{k=1}^{r-1} h_k(t)e^{\lambda_k t}}_{\text{lemme 1}} + \underbrace{((\frac{d}{dt})^{m_r} g_r)e^{\lambda_r t}}_{\text{lemme 2}}$$

Or $((\frac{d}{dt})^{m_r}g_r) = 0$ car $\deg(g_r) \leq m_r - 1$ De plus $\deg(h_k) = \deg(g_k)$ pour tout $k = 1, \dots, r-1$

$$(D-\lambda_r)^{m_r}\Big(\sum_{k=0}^{r} g_k(t)e^{\lambda_k t}\Big) = (D-\lambda_{r-1})^{m_r}\Big(\sum_{k=0}^{r-1} h_k(t)e^{\lambda_k t}\Big).$$

Par récurrence, on obtient le dernier terme : $f(t)e^{\lambda_1 t} = 0$ où $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(f) = \deg(g_1)$ mais g_1 n'est pas identiquement nulle, et f l'est, ce qui est une contradiction, donc $\mu_{j,k} = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m_k - 1\}$ et $k \in \{1, \dots, r\}$. □

Exemple 1.41. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$. Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2$ On a donc deux racines de multiplicité 2. Un système fondamental est donné par $\{e^{2it}, e^{-2it}, te^{-2it}, te^{2it}\}$ Ce qui donne comme système fondamental réel $\{\cos(2t), \sin(2t), t\cos(2t), t\sin(2t)\}$, donc toutes les solutions sont de la forme $y(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t) + \gamma t\cos(2t) + \delta t\sin(2t)$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Le problème linéaire non homogène

On souhaite résoudre $P(D)y = b$.

Remarque 1.42.
1. Si y_p est une solution du problème, alors on connaît toutes les solutions, qui sont de la forme $y = y_p + c.y_h$ où y_h est solution du problème homogène $P(D)y = 0$.
2. Par le principe de superposition, si $b(t) = \sum b_i(t)$ et $P(D)y_i = b_i$ alors $P(D)(\sum y_i) = \sum b_i = b$.

Dans le cas général, on a la méthode : utiliser les solutions homogènes pour déterminer un système fondamental (i.e. on prend

$$\Phi_k(t) \overset{\text{def.}}{=\!=} (\varphi_k(t), \varphi_k'(t), ..\varphi_k^{(n-1)})$$

où $\{\varphi_k : k = 1..n\}$ est le système fondamental obtenu avec la méthode décrite en haut via le polynôme caractéristique). Puis puis appliquer la méthode de la variation de la constante à la réécriture du système au premier ordre. Cependant, dans certaines situations, on "sait d'avance" à quoi la solution va ressembler, ce qui offre un raccourci et important gain de temps.
D'abord, si $b(t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(t)$, par superposition des solutions, il suffit d'étudier chaque second membre $g_j(t)$ séparément. On va s'intéresser au cas que $g_j(t) = e^{\mu_j t}p_j(t)$ avec $p_j \in \mathbb{C}[X]$. Ici, μ_j complexe est expressément autorisé, mais sera systématiquement réécrit en $\cos(a_j t)e^{b_j t}$ et $\sin(a_j t)e^{b_j t}$ où $\mu_j = a_j + ib_j$. Il y a deux cas : soit $P(\mu) = 0$, on parle de cas raisonnant, soit μ n'est pas racine de P, c'est le cas non raisonnant.

Théorème 1.43. *Soit l'équation différentielle $P(D)y = g(t)e^{\mu t}$*

1 si $P(\mu) \neq 0$, il existe une solution particulière de la forme $\varphi(t) = h(t)e^{\mu t}$ où $h \in \mathbb{C}[X]$; $\deg(g) = \deg(h)$.

2 si $P(\mu) = 0$, avec la multiplicité de μ égale à k, alors $\varphi(t) = h(t).t^k e^{\mu t}$ est une solution particulière du problème, avec $h \in \mathbb{C}[X]$; $\deg(h) = \deg(g)$

Démonstration.

- *Cas non raisonnant :*$P(\mu) \neq 0$ Posons $m = \deg(g)$. On procède par récurrence : si $m = 0$ on a $b(t) = \lambda e^{\mu t}$; $\lambda \in \mathbb{C}$ Or $P(D)e^{\mu t} = P(\mu)e^{\mu t}$ En multipliant à gauche par la constante $\frac{\lambda}{P(\mu)}$, on obtient $P(D)\frac{\lambda}{P(\mu)}e^{\mu t} = \lambda e^{\mu t}$, donc $\varphi = \frac{\lambda}{P(\mu)}e^{\mu t}$ est solution particulière, avec $h(t) = \frac{\lambda}{P(\mu)}$, polynôme de degré 0.
  Supposons la proposition vraie pour tout g de degré inférieur ou égal à m. Au rang $m+1$: soit g de degré $(m+1)$; $\underline{P(D)(t^{m+1}e^{\mu t}) = g_0(t)e^{\mu t}}$ avec $\deg(g_0) = m+1$ par le lemme 2. Posons $g_1(t) = g(t) - cg_0(t)$, en choisissant $c \in \mathbb{C}$ de manière à ce que $\deg(g_1) = m$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour g_1 : il existe un polynôme h_1 de degré m tel que $\underline{P(D)(h_1(t)e^{\mu t}) = g_1(t)}$
  Posons $h(t) = h_1(t) + c.t^{m+1}$ On a alors $P(D)(h(t)e^{\mu t}) = P(D)(h_1(t) + c.t^{m+1}) = (g_1(t) + c.g_0(t))e^{\mu t}$ par linéarité de D, c'est à dire $P(D)(h_1(t)e^{\mu t}) = g(t)$. La propriété est vraie au rang $m+1$.
- *Cas raisonnant :* $P(\mu) = 0$ On pose $P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - \mu)^k$ de façon que $Q(\mu) \neq 0$. Par (1) du théorème, il existe h_1 de degré $\deg(g)$ tel que $Q(D)(h_1(t)e^{\mu t}) = g(t)e^{\mu t}$. Soit h une primitive k-ième de la forme $h(t) = t^k \sum_{j=0}^{\deg(g)} a_j t^j$. Par le lemme 1, $(D-\mu)^k(h(t)e^{\mu t}) = h_1(t)e^{\mu t}$ d'où $P(D) = [Q(D)(D-\mu)^k](h(t)e^{\mu t}) = Q(D)h_1(t)e^{\mu t})$

□

Exemple 1.44. • $y^{(3)} - 3y' + 2y = t^2$. Un système fondamental pour le problème homogène est $\{e^{2t}, e^t\}$. On cherche une solution particulière au problème non homogène, en remarquant que $b(t) = t^2 e^{0.t}$: comme $P(0) \neq 0$ on est dans le cas non raisonnant, c'est à dire qu'il existe une solution particulière de la forme $y_p(t) = at^2 + bt + c$. On calcule les dérivées successives, puis on injecte dans l'équation différentielle : $2a - 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c)t^2 = t^2$ ce qui donne, par comparaison des coefficients devant t^j le système linéaire

$$\begin{array}{rcll} 2a - 3b + 2c & = 0 & & \text{(coeff. de } t^2) \\ -6a + 2b & = & 0 & \text{(coeff. de } t) \\ 2a & = & 1 & \text{(coeff. constant)} \end{array}$$

d'où $a = 1/2$; $b = 3/2$; $c = 7/4$, et une solution particulière est : $y_p(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3t}{2} + \frac{7}{4}$.
Alors l'ensemble des solutions est donné par

$$y(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^t + \frac{t^2}{2} + \frac{3t}{2} + \frac{7}{4} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Pour un problème de Cauchy (avec valeur initiale), il faut calculer l'unique (!) (α, β) avec les valeurs initiales.

- $y^{(3)} - 3y' + 2y = t^2e^t$. Puisque $P(1) = 0$, on est dans le cas raisonnant, de plus c'est une racine simple, donc on aura une solution particulière de la forme $y_p(t) = t^2(at^2 + bt + c)e^{1.t}$ De la même façon on calcule les dérivées successives de $y_p(t)$.

$$\begin{cases} y_p'(t) = (at^4 + (4a+b)t^3 + (3b+c)t^2 + 2ct)\, e^t \\ y_p''(t) = (at^4 + (8a+b)t^3 + (12a+6b+c)t^2 + (6b+4c)t + 2c)\, e^t \\ y_p^{(3)}(t) = (at^4 + (12a+b)t^3 + (36a+9b+c)t^2 + (24a+18b+6c)t + (6b+6c))e^t \end{cases}$$

En injectant dans l'équation différentielle il vient

$$\begin{array}{rcll} a - 3a + 2a & = & 0 & \text{(coeff. de } t^4) \\ (12a+b) - 3(4a+b) + 2b & = & 0 & \text{(coeff. de } t^3) \\ 36a & = & 1 & \text{(coeff. de } t^2) \\ 24a + 18b & = & 0 & \text{(coeff. de } t) \\ 6b + 6c & = & 0 & \text{(coeff. constants)} \end{array}$$

Le système est triangulaire. La première ligne intéressante est celle de t^2 qui donne $a = 1/36$. Puis celle de t donne $b = -1/27$, et finalement $c = +1/27$. Il suit qu'une solution particulière est

$$y_p(t) = (\frac{t^4}{36} - \frac{t^3}{36} + \frac{t^2}{36})e^t$$

Alors toutes les solutions sont données par

$$y(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + (\frac{t^4}{36} - \frac{t^3}{36} + \frac{t^2}{36})e^t, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

- $y''(t) + y(t) = \sin(t)$. Les racines de $p(X) = X^2 + 1$ sont $\pm i$, ce qui donne le système fondamental réel $\{\sin(t), \cos(t)\}$. On est dans le cas résonnant, une solution homogène ne peut être particulière. On cherche donc, comme avant, la solution sous la forme $y_p(t) = t(a\cos(t) + b\sin(t))$ (en multipliant avec t puissance multiplicité de la racine). On dérive deux fois :

$$\begin{array}{rcl} y'(t) & = & (bt + a)\cos(t) - (at - b)\sin(t) \\ y''(t) & = & (-bt - 2a)\sin(t) - (at - 2b)\cos(t) \end{array}$$

et injecte dans l'équation différentielle. Il suit

$$-2a\sin(t) + 2b\cos(t) = \sin(t)$$

ce qui suggère $a = -1/2$ et $b = 0$. On a donc

$$y_p(t) = -t/2\cos(t).$$

On voit qu'il a été sage de ne pas négliger le terme du cos dans le Ansatz en haut ! Le fait que $b(t)$ contient qu'un sinus ne présage rien sur la solution particulière : c'est une somme de sinus et cosinus, en général ! La solution générale est donc

$$y(t) = (\alpha - t/2)\cos(t) + \beta\sin(t) \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1.4. Méthodes qualitatives

Manque de temps, ce chapitre est passé à la trappe en 2021.

1.4.1. Barrières

A lire dans Hubbard-West, si envie.

1.4.2. Problèmes autonomes.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $F; \Omega \to \mathbb{R}^d$ continu. On s'intérese au problème autonôme

$$y' = F(y)$$

Si $F(y^*) = 0$, alors $y(t) = y^*$ est une solution constante, on dit stationnaire. Si F est de classe $\mathcal{C}^1$, la différentielle de F en y^* donne

$$y'(t) = F(y(t)) = 0 + D_F(y^*)(y(t) - y^*) + r(y(t) - y^*) = A.y(t) - A.y^* + r(y(t) - y^*)$$

ce qui donne envie de percevoir l'équation comme une "perturbation" du système linéaire.

1.4.3. Linéarisations : un théorème de stabilité

1.4.4. Linéarisations : un théorème d'instabilité