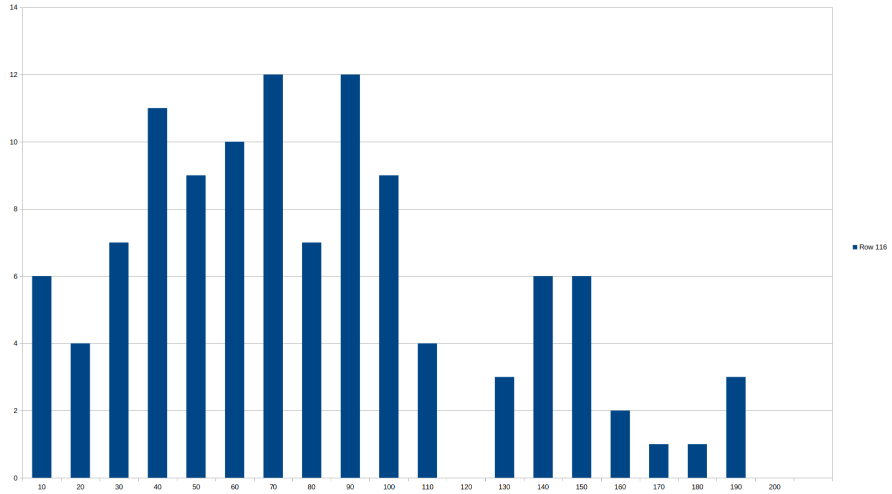
Corrigé & Analyse de l'examen.

D'abord la repartition des notes globale: (ici, "10" signifie $[0, 10]$, "20" signifie $(10, 20]$ etc.). Dans les diagrammes exercice par exercice je distingue "$-$" ce qui veut dire "non-entamé" de 0: tout faux).

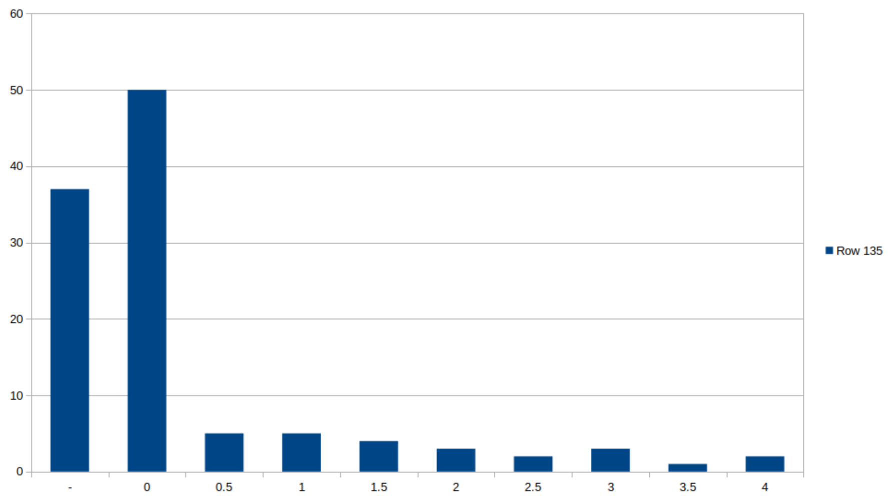


Environ 1/6 des copies est entre 120-200 points, avec un bon, voir très bon niveau. Ensuite, on distingue un bloc entre 80-110, des copies avec quelques lacunes évitables.
Le reste, et c'est plus que la moitié(!) sont des copies qui mettent en évidence de grandes lacunes, le matériel du cours (et souvent celui de la Licence 1-2) n'est pas su: je dois constater un échec pédagogique.

Question 1 *Soit N une norme ouverte sur $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Soit $B = B(a, r)$ une boule. Justifier que N n'admet pas de maximum sur B.*
Soit (par absurde) x un point où N est maximal.
raisonnement topologique: B est ouvert; Or N est continu, $N^{-1}(B)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ qui contient $N(x)$, donc aussi un voisinage de ce point réel - ainsi, N admet des valeurs plus grands dans B.
raisonnement "géométrique" Or la boule est ouverte, on a $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$, et donc $tx \in B(a, r)$ pour $t > 1$ qui se calcule à la main. Il suit que $tx \in B$ et $N(tx) > N(x)$ ce qui est absurde.

(b) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que D_f est inversible en tout point. Montrer que $g(x) = N(f(x))$ n'a pas de maximum local dans Ω.* Indication: inversion locale
Par hypothèse il existe pour tout $x \in \Omega$ deux ouverts U, V de $\mathbb{R}^n$ avec $x \in U$ et $f|_U : U \to V$ bijectif. Si g admettait un max sur Ω, alors $g \circ (f|_U)^{-1}$ sur V (ouvert), donc dans une boule incluse dans V ce qui est absurde par (a).



Plus qu'un tiers des copies (37) n'a même pas entamé l'exercice! Plus de la moitié residuelle (50) reste a 0 points, avec des mots plaqués sans sens. Seul 1/6 a su répondre. Sur cette partie, la majorité des erreurs se concentre sur un mélange avec la topologie, notamment l'écriture de $N(x,y)$, puis sur des erreurs de manipulation du au fait que $B(a,r)$ n'est pas centrée en 0.

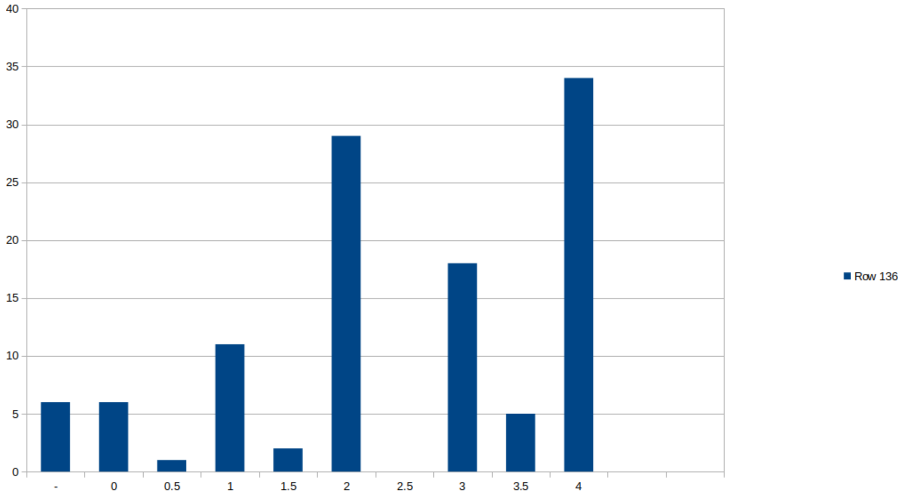
Question 2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Donner des exemples d'équation différentielles pour des fonctions $y = y(t)$ sur I avec des propriétés suivantes*

(a) *un exemple d'une équation différentielle séparable, non-linéaire, d'ordre 1.*
$y' = y^2$

(b) *un exemple d'une équation différentielle non-séparable, non-linéaire.*
$y' = \arctan(ty^2)$.

(c) *un exemple d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 avec des coefficients non-constants* $y'' + \sin(t)y' + y = 0$.

(d) un exemple d'une équation linéaire non-homogène d'ordre 2 avec des coefficients constants. $y'' + y' + y = e^t$.



La moitié des copies sont bien réussis, l'autre moitié était en découverte du vocabulaire. Souvent "ordre" était confondu avec la taille (dimension) d'un système linéaire.

Question 3 Résoudre les équations suivantes.

$$y'(t) = \frac{y(t)}{1-t} + t - 1, \quad \text{sur} \quad (1, +\infty) \quad \text{avec} \quad y(2) = 0$$

$$z'(t) = \frac{t\,z^3}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{sur} \quad (-1, 1) \quad \text{avec} \quad z(0) = -1$$

La première est linéaire. Une primitive de $\frac{1}{1-t}$ sur $(1, +\infty)$ est $-\ln(t-1)$. Attention au signe!! Donc $y_h(t) = \exp(-\ln(t-1)) = \frac{1}{t-1}$. Une erreur de signe dans l'exponentielle serait catastrophique, on vérifie donc systématiquement que c'est bien une solution en re-dérivant! On effectue ensuite la variation de la constante : $y_p = y_h.c$ ce qui donne $c'(t) = b(t)/y_h(t) = (t-1)^2$. Ainsi, $c(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3$ et donc $y_p(t) = \frac{1}{3}(t-1)^2$. Il suit que la solution est de la forme

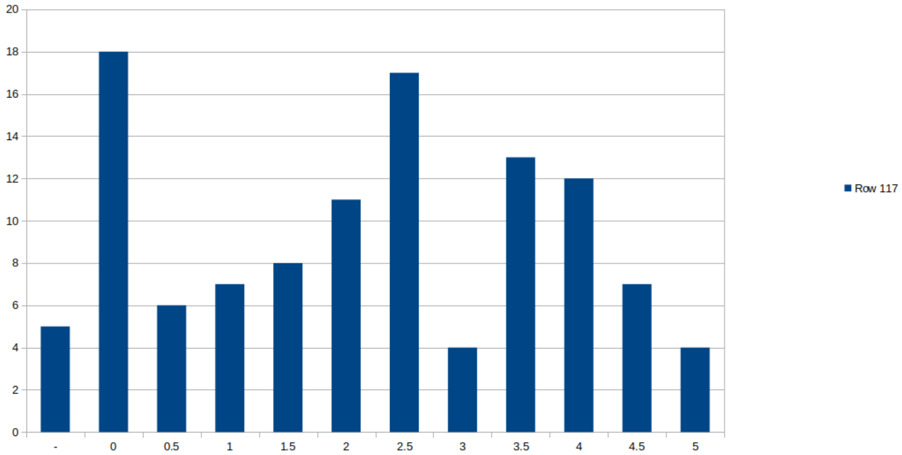
$$y(t) = \tfrac{1}{3}(t-1)^2 + \lambda \tfrac{1}{t-1}$$

Or $y(2) = 0$, on trouve $\lambda = 1/3$.
La deuxième équation est non-linéaire, à variables séparés: on a donc

$$\tfrac{-1}{2}(z^{-2} - 1) = \int_{-1}^{z} \tfrac{dx}{x^3} = \int_0^t \tfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+t^2} - 1$$

ce qui se simplifie en $z(t)^{-2} = 3 - 2\sqrt{1+t^2}$. Par considération du signe de la valeur initiale, on a $z(t) = \frac{-1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+t^2}}}$. Or $2\sqrt{2} < 3$, cette fonction est bien définie sur $(-1, 1)$. On teste en re-dérivant l'absence de fautes de calcul.
Deux questions essentiellement "annoncés" que j'espérais mieux réussi. Question (a): beaucoup d'erreurs sur la primitive de $1/x$ qui est $ln|x|$ et pas $\ln(x)$.... Ensuite, plein d'erreurs dans le traitement de $\exp(a\ln(x))$. Question (b): très souvent $z^2 = A$ est résolu par $z = \sqrt{A}$ en ignorant

que la racine est positive et que la solution (via la valeur initiale) est ici nécessairement $-\sqrt{A}$ (peu importe l'expression A). **Presque personne ne re-dérive les "solutions" pour vérifier - ce qui aurait évité les 3/4 des erreurs.**



Question 4 *Donner toutes les solutions de l'équation $y' = Ay$ pour*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

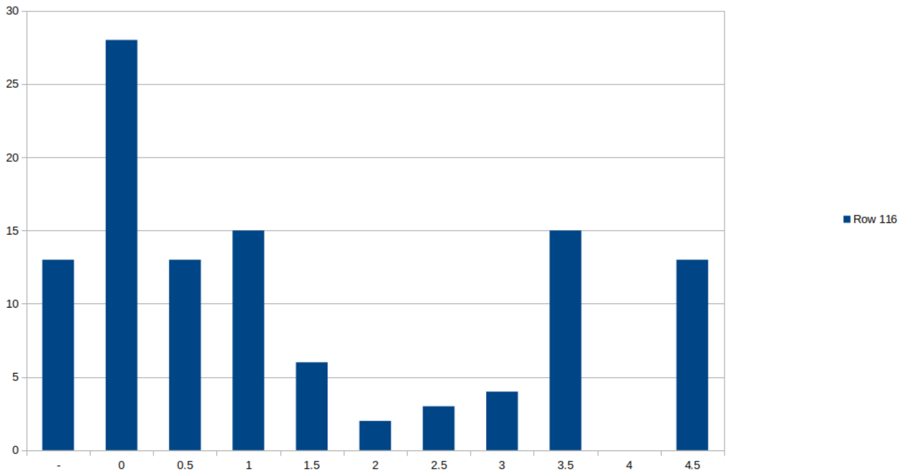
Indications: On "voit" une valeur propre positive. Laquelle? Et quel est le rang de A? Déduire la dimension du noyau de A pour éviter de devoir développer le polynôme caractéristique. Ensuite, on devine facilement une base du noyau de A.

Soit $v_1 = (1,1,1,1)^t$. Clairement, $Av_1 = 4v_1$. Aussi, le rang de A est 1, donc la dimension du noyau 3. Ce qui veut dire que 0 est une valeur propre. On voit que $v_2 = (1,-1,0,0)^t$, $v_3 = (1,0,-1,0)^t$ et $v_4 = (1,0,0,-1)$ sont indépendants et dans le noyau. A est donc diagonalisable et toute solution est de la forme

$$y(t) = \alpha e^{4t} v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

Beaucoup d'erreurs sur le théorème du rang (même au niveau du vocabulaire rang et noyau), souvent des erreurs de calcul des V.P. Sinon, des erreurs (s'il y en a) sont de ne pas voir que A est diagonalisable! Par conséquent, des fausses expressions polynomiales avec les exponentielles dans la solution.



Question 5 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $0 \le f(t,y) \le 1$ pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle*

$$y'(t) = t + f(t, y(t)) \qquad y(0) = 0$$

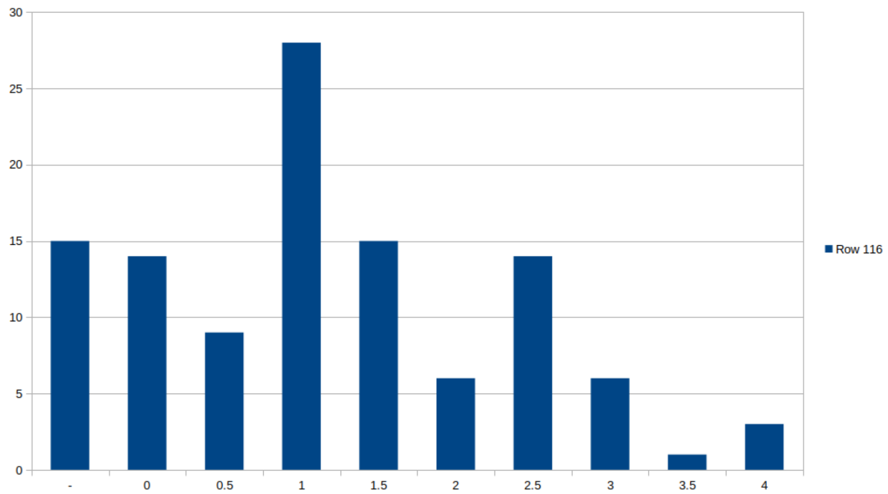
(a) *Donner exemple explicite et non-trivial d'une telle fonction f.* $f(t,y) = \sin^2(t+y)$ ou $f(t,y = \exp(-t^2 - y^2)$. Erreurs fréquents: $|\sin(x)|$ n'est pas C^1, et x^2 est non borné!

(b) *Donner une minoration/majoration évidente de y' qui ne dépend que de t. Les primitiver pour trouver une barrière inférieure / supérieure pour la solution sur $[0,\infty)$.* $0 \le f(t,y) \le 1$ produit que $\alpha(t) = t^2/2$ est une barrière inf. et $\beta(t) = t^2/2 + t$ une barrière sup. pour cette équation sur $[0,\infty)$. Bien réussi

(c) *Est-ce que ces barrières sont poreuses? Justifier votre réponse.* f est de classe C^1, donc Lipschitz sur $[-M,M]$ pour tout $M > 0$. Il suit que la barrières sont non-poreuses sur $[-M,M]$ pour tout $M > 0$ donc sur $\mathbb{R}$. Très peu de réponses, souvent bonnes bonnes réponses.

(d) *Déterminer l'intervalle d'existence maximale de y.* Puisque $|y(t)| = |\int_0^t y'(s)ds| \le |\int_0^t 1 + sds| \le |t| + t^2/2$, y n'explose pas en temps fini. Par le théorème des bouts la solution est donc globale (définie sur $\mathbb{R}$). Bien réussi

(e) *Reprendre votre exemple de (a) (donc votre choix non-trivial de f): est-ce que la limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t^2$ existe? Si oui, quelle est sa valeur?* Par l'encadrement $t^2/2 \le y(t) \le t^2/2 + t$, cette limite vaut $1/2$, peu importe f.



Question 6 *Soit $q \ge 0$. On considère le problème de Cauchy suivant,*

$$\begin{cases} x'(t) = -y \\ y'(t) = x + q\,x^3 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) *Expliquer pourquoi le problème admet une unique solution maximale.*

On pose $F(x,y) = (-y, x + q\,x^3)$ et $X = (x,y)$. Alors $X' = F(X)$. La fonction F est de classe C^∞, en particulier continue et loc.t Lipschitz. On a donc unicité et existence d'une solution maximale pour toute valeur initiale. RAS

(b) *Si $q = 0$, donner la solution et expliquer pourquoi (x,y) est périodique.*

$x'' = (-y)' = -x$ suggère x (et donc y) comb. lin. de $\sin, \cos$: $x(.), y(.)$ sont donc évidemment périodiques. $x(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$, Par v.i. $a = x_0$. Ensuite, $y = -x' = x_0 \sin(t) - b\cos(t)$, par v.i. $b = -y_0$.

très souvent seulement une solution $(\cos, \sin)$ est donné qui en plus ne répond pas aux V.I. – si toutes les solutions étaient donnés (sans se préoccuper des V.I. j'ai quand-même donné tous les points.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose $q > 0$. Soit (x, y) la solution maximale du problème de Cauchy.

(c) *Chercher un réel $\alpha > 0$ tel que si $H_\alpha(x, y) = x^2 + \alpha x^4 + y^2$, alors $h(t) = H_\alpha(x(t), y(t))$ est une fonction constante.*

On sait que H constant lors des trajectoires ssi $d_H.F = 0$, i.e. ssi

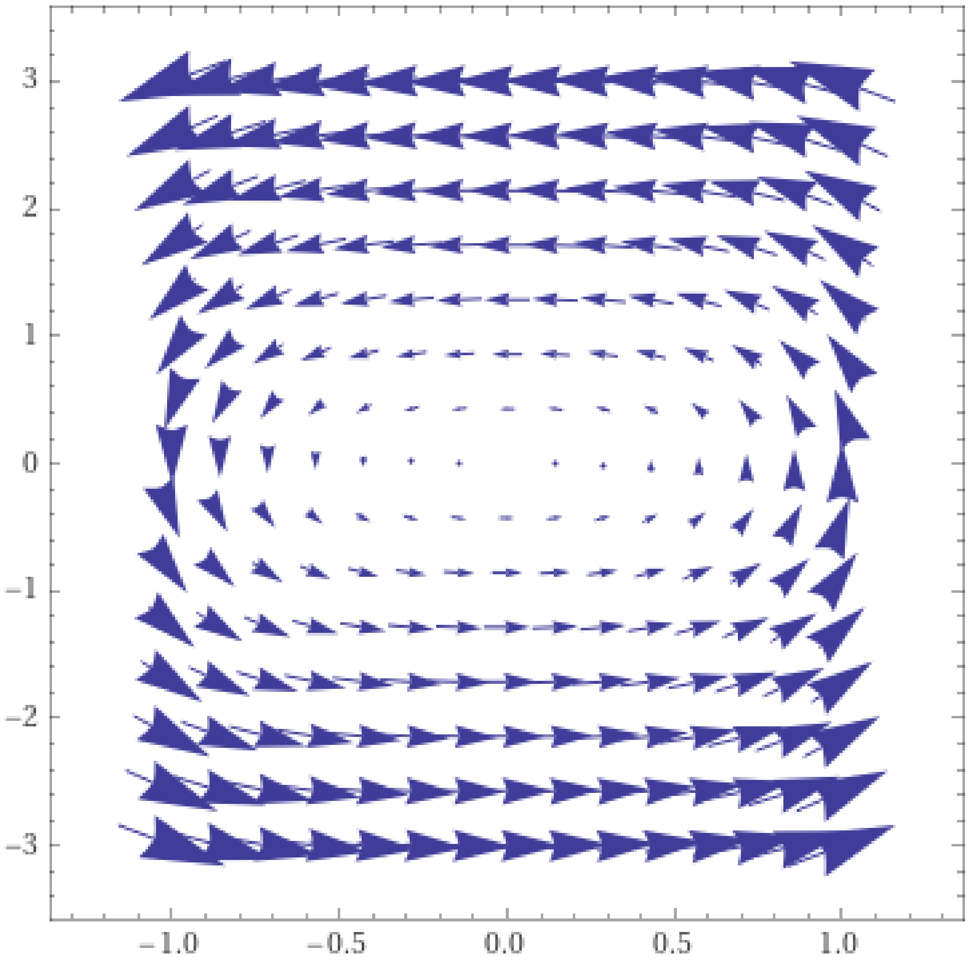
$$0 = \langle \nabla H, F \rangle = \langle (2x + 4\alpha x^3, 2y), (-y, x + q\,x^3) \rangle = -y(2x + 4\alpha x^3) + y(2x + 2qx^3)$$

Le bon choix pour α est $\alpha = q/2$.

(d) *Montrer que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.*

Puisque la solution maximale décrit de "lignes de niveau" de H et celles-ci sont bornées, les solution maximales sont bornées et donc globales par le thm des bouts.

(e) Dessiner, dans le plan, le champ de vecteur $X' = (x', y')$ en fonction de $X = (x, y)$.



Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose $y_0 = 0$ et $x_0 > 0$.

(f) *Montrer par l'absurde, qu'il existe $t > 0$ avec $x(t) = 0$.* Sinon, vu la valeur initiale, $x(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Il suit $y'(t) > 0$ pour $t \geq 0$, donc y strictement croissant. En particulier, $y(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Prenons un t quelconque, par exemple $t = 42$. Soit $y(42) =: A > 0$. Alors pour $t \geq 42$, $x'(t) \leq -A$ ce qui entraîne $x(t) \leq 0$ en temps fini et donc une contradiction.

les réponses étaient souvent 1/2 page d'observation inutiles suivis du fameux "donc" non-justifié.

(g) *Montrer qu'il existe $t^* > 0$ tel que $x(t) > 0$ sur $[0, t^*)$, $x(t^*) = 0$ et $y(t^*) > 0$.*

Soit

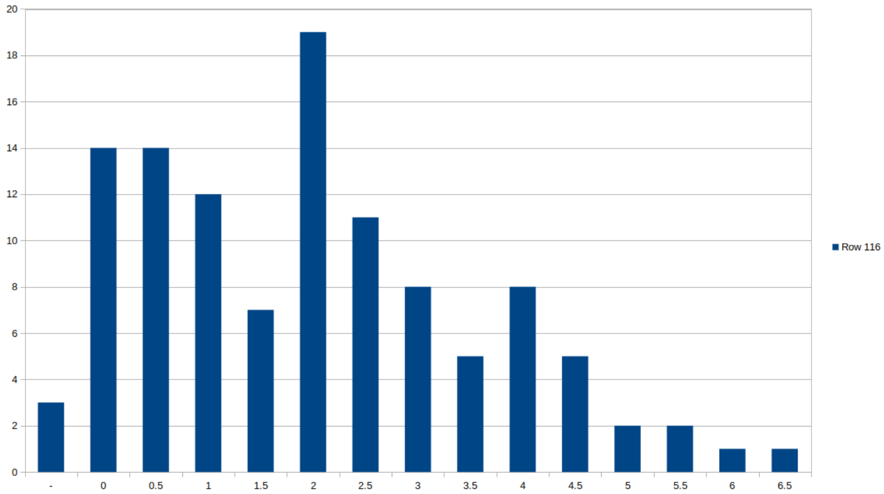
$$t^* = \inf\{t > 0 : x(t) \leq 0\}.$$

D'abord, il existent tels t par la question précédente. Le inf existe donc aussi. Ensuite, vu que $x(0) = x_0 > 0$, x est strictement positif sur un intervalle autour de 0 par continuité. Il suit $t^* > 0$. On observe que $x(t) > 0$ sur $[0, t^*)$ par construction. Ensuite, si on avait $x(t^*) > 0$, alors $x(t^* + h) > 0$ pour $|h| < \delta$ ce qui est absurde, donc $x(t^*) \leq 0$. Par continuité $x(t^*) = 0$. Sur $[0, t^*]$, $x > 0$, donc y str. croissant (voir argument d'en haut), donc $y(t) > 0$ sur $(0, t^*]$.

On peut montrer de même qu'il existe $T > t^* > 0$ tel que $x(T) > 0$ et $y(T) = 0$.(admis)

(h) *Montrer que $x(T) = x_0$.* Les solutions (x, y) suivent les lignes de niveau de H. L'équation bi-quadratique $\alpha x^4 + x^2 = c$ avec $\alpha > 0$ (car $q > 0$) n'a que deux solutions réelles, une est positive, l'autre négative. Si $T > t^*$ est tel que $x(T) > 0$ et $y(T) = 0$, nécessairement (unicité) $x(T) = x_0$ et $y(T) = y_0 = 0$.

(i) *Montrer que $X = (x, y)$ est périodique.* On vient de voir que $X(0) = X(T)$. Vu que $X' = F(X)$ est autonome, on peut translater les solution en temps et obtient autres solutions. Il suit que $\tilde{X}(T + .)$ est une solution à $X' = F(X)$ avec la même valeur initiale, donc $\tilde{X}(T + t) = X(t)$ pour tout t par unicité.



Souvent bien réussi, mais rarement fini, pas forcément pour des raisons de temps