Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Justifier que $f \in C^0(\mathbb{R}^2) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$.
b) Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
c) Utiliser l'inégalité $|2ab| \leq a^2 + b^2$ pour montrer les inégalités suivantes

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |y| \frac{|y|^4}{x^2+y^4}, \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x| \frac{|3x^2-y^4|}{2(x^2+y^4)}.$$

Discuter de l'appartenance de f à $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On note $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) := \tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On supposera qu'il existe deux constantes $\ell, L > 0$ telles que

$$\ell \left\|x\right\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq L \left\|x\right\|^2.$$

a) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.
b) Calculer la différentielle de f. Justifier que le minimum de f est atteint en un unique point x^* déterminé par $A\,x^* = b$.
c) Nous inversons la logique : pour trouver la solution du système linéaire, on cherche à minimiser f. L'algorithme suivant est proposé :

initialisation :	$x_0 = 0, n = 0$,
répéter :	$r_n := Ax_n - b$ (direction des pas),
	$s_n := \text{arg.min}\{f(x_n - s\, r_n), s \in [0, 2/L]\}$ (longueur de pas),
	$x_{n+1} := x_n - s_n r_n$
	sortie de la boucle (selon conditions) ou incrément de n
fin :	retourner x_{n+1}

d) Montrer que s_n est donné à chaque étape par la formule suivante

$$s_n = \min\left(\frac{\|r_n\|^2}{\langle Ar_n, r_n\rangle}, \frac{2}{L}\right).$$

e) *(facultatif)* Expliquer l'idée de l'algorithme.
f) Montrer que pour tout n, on a

$$x_{n+1} - x^* = (I - s_n A)(x_n - x^*).$$

g) Rappeler pourquoi la norme $\|M\|_{2\to 2}$ d'une matrice symétrique M est égale au maximum des valeur absolues des valeurs propres de M. En déduire qu'il existe $q \in (0,1)$ tel que, pour tout n, on a :

$$\|x_n - x^*\|_2 \leq q^n \|x_0 - x^*\|_2 .$$

Remarque : Le nombre $\kappa(A) := L/\ell = \|A\|_{2\to 2} \|A^{-1}\|_{2\to 2}$ *est appelé le conditionnement de* A. *Il joue un rôle central dans la vitesse de convergence de l'algorithme. Une accélération importante consiste à ne pas corriger* x_n *dans la direction* r_n*, mais plutôt dans la direction* $\pi_{n-1}(r_n)$*, où* π_{n-1} *est la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les* $n-1$ *premières corrections. Cet algorithme est appelé "méthode du gradient conjugué" termine théoriquement après n pas. En pratique, il converge en général beaucoup plus rapidement.*

Exercice 3. (Une curiosité sur les accroissements finis)

a) Donner un contre-exemple au théorème des accroissement fini pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

b) (Une séparation géométrique) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé et $x_0 \notin V$. On veut dans cette question montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall v \in V, \qquad \langle x_0, d\rangle \geq \varepsilon + \langle v, d\rangle.$$

   i) Rappeler la définition d'un hyperplan, ainsi que leur caractérisation via le produit scalaire.

   ii) Donner un contre exemple si on ne suppose pas V convexe. On se contentera de faire un dessin soigné.

   iii) Montrer que l'application $v \in V \mapsto d(x_0, v) \in \mathbb{R}$ admet un minimum.

   iv) Montrer que ce minimum est atteint en un unique point, que l'on notera v_0 par la suite.

   v) ($\star$) Montrer, en utilisant la convexité de V, que pour $v \in V$, on a $\langle v - v_0, x_0 - v_0\rangle < 0$.

   vi) Conclure en posant $d = x_0 - v_0$ et ε bien choisi.

c) (Une version convexe des accroissements finis). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, de classe C^1 sur $]a,b[$.

   i) Soit $d \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Montrer qu'il existe $\xi \in (a,b)$ tel que

$$\left\langle \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, d \right\rangle = \langle f'(\xi_d), d\rangle .$$

   ii) En utilisant le fait que

$$\forall d \in \mathbb{R}^n, \qquad \left\langle \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, d \right\rangle \leq \sup_{a<\xi<b} \langle f'(\xi), d\rangle ,$$

   montrer que le vecteur $v := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est dans l'enveloppe convexe de

$$X := \overline{\{f'(\xi) : a < \xi < b\}}.$$

Remarque: on peut montrer qu'il existe $n+1$ *points* $\xi_0, \dots, \xi_n$ *et des scalaires* $\lambda_0, \dots, \lambda_n > 0$ *tels que*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \qquad \textit{et} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f'(\xi_i).$$

Ce théorème, dû McLeod, a été démontré en 1964.