Exercice 1 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $u(t,x) := f(t+t^2x^2)$. Justifier que u satisfait l'équation différentielle

$$x\,\tfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - t\,\tfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -x \qquad \text{et} \qquad u(0,x) = f(x^2)$$

Exercice 2 Donner toutes les solutions des problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{array}{rclcl} y'(t) & = & \frac{-4t^3}{1+t^4}\,y(t) + \frac{1}{1+t^4} & \qquad & y(0) = 0. \\ z'(x) & = & x\,e^{x^2-2z(x)} & & z(0) = 0 \end{array}$$

On justifiera soigneusement d'avoir trouvé toutes les solutions.

Exercice 3 Montrer qu'il existe une fonction f_n sur un voisinage de 0 qui satisfait l'équation

$$\begin{cases} (1-x^2)f_n''(x) - 2x\,f_n'(x) + n(n+1)f_n(x) = 0, \\ f_n(0) = 1, f_n'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Supposer que $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} x^k$ existe sous forme de série, puis établir une relation de récurrence entre les coefficients $(a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$.

b) Que pouvez vous dire du rayon de convergence de la série obtenue?

c) Expliciter la fonction f_2, puis montrer que f_{2n} est une fonction polynomiale pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4 On considère l'équation non-linéaire

$$y''(t) + |y(t)| = 0 \qquad y(0) = 0, y(2\pi) = -\sinh(\pi) \tag{E}$$

Le but de l'exercice consiste à montrer qu'elle admet exactement 2 solutions. On procède par une distiction de cas selon le signe de $y'(0)$ *(remarque: les 3 questions sont indépendantes).*

a) Dans le cas où $y'(0) < 0$, écrire

$$y(t) = \int_0^t \Big(y'(0) + \int_0^r y''(r)\,dr \Big)\,ds \tag{1}$$

pour déterminer le signe de $y(t)$ sur $(0, 2\pi]$. L'injecter dans (E) pour calculer la solution (justifier unicité).

b) Montrer que toute solution de (E) satisfait $y'(0) \neq 0$: a ce fin considérer $y'' + |y| = 0$ avec valeur initiale $y(0) = y'(0) = 0$ (raisonnement par l'absurde). Utiliser (1) pour montrer que $y(t) = 0$ sur $[0, 2\pi]$ et conclure.

c) Dans le cas où $y'(0) > 0$, utiliser (1) pour justifier que $y(t) > 0$ sur $(0, \varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Calculer cette solution y_0 en injectant le signe de $y(t)$ dans (E). Avec cette solution, justifier qu'on peut choisir $\varepsilon = \pi$. Calculer $y_0(\pi)$ et $y_0'(\pi)$. S'inspirer des arguments du point (a) pour déterminer la solution y_π sur $[\pi, 2\pi]$ avec valeurs initiales fournies par $y_0(\pi)$ et $y_0'(\pi)$.

d) Justifier que le racollage de y_0 et y_π est de classe C^2 et satisfait (E).