Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2021

TD : Équations différentielles et calcul différentiel
Feuille 3

Inversion locale & fonction implicitement définies

Exercice 1. (**Un contre-exemple utile**) On considère la fonction f définie par $f(x) := x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Commenter.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} - e^x \\ e^x - e^y \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe des voisinages U, V de $(0,0)$ tel que $f : U \to V$ est un inversible. Déterminer la différentielle de la fonction réciproque f^{-1} au point $(0,0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(x) + y^2 + yz \\ x^2 + y^2 + 2z \\ y^3 - z^3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe un voisinage U de $(0,1,1)$ et V de $(2,3,0)$ tel que $f : U \to V$ est un inversible. Déterminer la différentielle de la fonction réciproque f^{-1} au point $(2,3,0)$.

Exercice 4. (**Racine et logarithme**)
a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $\|I_n - A\| < \alpha$ admette une racine carré dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. C'est à dire qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.
b) Montrer qu'au voisinage de 0, l'exponentielle matricielle est un difféomorphisme local. Est-il global?

Exercice 5. Montrer que le système

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + z^3 &= 1 \\ xyz &= 1 \end{cases}$$

définit implicitement une fonction $(y,z) = \phi(x)$ au voisinage du point $(1,1,1)$. Déterminer $\frac{dy}{dx}(1)$ et $\frac{dz}{dx}(1)$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose qu'il existe k tel que

$$\forall (x,y),\ \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

a) Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
b) Montrer que pour tout x, $d_x f$ est inversible.
c) ($\star$) En déduire que f est un C^1-difféomorphisme global.

Exercice 7. On considère l'exponentielle complexe sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u,v) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) \in \mathbb{R}^2, \quad z := x + iy,\ f(z) = u + iv.$$

a) Montrer que f est un C^1 difféomorphisme local.
b) Est-ce que f est un C^1 difféomorphisme global ?

Exercice 8. On considère l'application

$$\Phi = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y^2, y+z^2, z+x^2) \end{cases}$$

a) Déterminer l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ des point où le jacobien de Φ ne s'annule pas.
b) Soit $(u_0, v_0, w_0) = \Phi(x_0, y_0, z_0)$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. On note

$$(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = \Phi^{-1}(u,v,w)$$

dans un voisinage de (u_0, v_0, w_0). Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, et $\frac{\partial z}{\partial u}$ en fonction de (x,y,z).

Exercice 9. Soit $F(x,y,z,v) = x\sin(y) + y\cos(z) - z\sin(v) - v\cos(x)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de $u_0 = (\pi, \pi/2, \pi)$ et une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfaisant $g(u_0) = \pi/2$ telle que $F(x,y,z,g(x,y,z)) = 0$ sur U. Déterminer le gradient de g au point u_0.

Exercice 10. Considérer l'équation

$$y^2 + \cos(x) + z^2 - \cosh(xz) = 2$$

dans un voisinage de $(0,-1,1)$. Montrer qu'il existe une fonction $z = g(x,y)$ de classe $C^1(U)$, où U est un voisinage de $(0,-1)$, telle que des solutions sont données par le graphe de $g|_U$. Déterminer le polynôme de Taylor ordre 1 de g.

Exercice 11. **(Examen 2020)** Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.
a) Soit $B = B(a,r)$ une boule ouverte. Justifier que N n'admet pas de maximum sur B.
b) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que D_f est inversible en tout point. Montrer que $g(x) = N(f(x))$ n'a pas de maximum local dans Ω. *Indication: inversion locale*

Début des équations différentielles !

Exercice 12. (**Équations différentielles linéaires du premier ordre**) Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$y'(x) = xy(x); \qquad y'(x) = \frac{1}{x}y(x); \qquad y'(x) = x^2 y(x);$$

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}y(x); \qquad y'(x) = e^x y(x); \qquad y'(x) = \frac{xy(x)}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$y'(x) = \ln(x)y(x); \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)y(x).$$

Exercice 13. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés :

$$y' = 5y, \quad y' + 3x^2 y = x^2, \quad x^2 y' + xy = 1, \quad xy' - y = x^2\sin(x).$$

Exercice 14. (**Équations différentielles séparables**). Résoudre les équations différentielles suivantes, où $t \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable:
a) $y' = 2y$; b) $y'y = 1$; c) $y'y^2 = t$; d) $y' = y^2$; e) $y' = y + y^2$; f) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3\ln t + 1}{t \ln t}$; g) $y' + (\tan t)y = 0$; h) $(t^2 + 1)y' - 2ty = 0$; i) $t(t^2+t+1)y' - (t^2-1)y = 0$; j) $(6t^2+t-1)y' - 5y = 0$.

Exercice 15. (**Équations différentielles séparables**). Résoudre les équations suivantes (déterminer les solutions maximales définies en $t = 0$) :

$$y' = \frac{\pi}{4}\cos(t)(1+y^2); \qquad y' = (1-y)y;$$
$$y' = t\sqrt{1-y^2}; \qquad y'y^2 = t.$$

Exercice 16. Une équation différentielle de la forme $p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x) = 0$ est dite *exacte* quand il existe $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $\nabla g = (p, q)$. Les solutions d'une telle équation vérifient $g(x, y(x)) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$ une constante, ce qui permet de résoudre.

a) Montrer que (E) $2y^2(x) + 2xy(x)y'(x) = 0$ n'est pas exacte.
b) Déterminer $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'équation $2\mu(x)y^2(x) + 2\mu(x)xy(x)y'(x) = 0$ soit exacte. Résoudre (E).
c) Mêmes questions pour $(2x+\sin(2x))\sin(y)\cos(y) + (x^2+\sin(x)^2)y'(x) = 0$ (facteur intégrant de la forme $\mu(y)$).

Exercice 17. a) Soit f une fonction de classe C^1. On veut résoudre le système

$$y' = f\Big(\frac{y}{t}\Big).$$

On effectue le changement de variable $z(t) := \frac{y}{t}$. Que peut on dire?

b) Résoudre l'équation différentielle

$$t^2y' = y^2 - 2\,t^2$$

où $t \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable.

Exercice 18. Chercher les fonctions $t \mapsto y(t)$ développables en série entière et solutions de l'équation différentielle

$$ty'' - ty' - y = 0.$$

Exercice 19. Chercher les fonctions $t \mapsto y(t)$ développables en série entière et solutions de l'équation différentielle

$$t^2y'' - t(t+4)y' + 2(t+3)y = 0.$$

Exercice 20. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle suivante en recherchant des solutions développables en série entière :

$$(1-t^2)y'' - 4ty' - 2y = 0.$$

Compléments

Exercice 21 (Continuité des valeurs propres)**.** On se propose de démontrer le résultat suivant : *"Le spectre d'une matrice symétrique dépend de manière C^∞ de la matrice tant qu'il n'y a pas de racine double"*.
On fixe un entier n.

a) Montrer que le polynôme caractéristique, vu en tant que fonction sur les matrices symétriques $\chi : M \in S_n(\mathbb{R}) \mapsto \chi_M \in \mathbb{R}_n[X]$ est une application de classe C^∞.
b) Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant P_0 tel que tout polynôme $P \in U$ soit scindé à racine simple et tel que l'application $P \in U \mapsto (\alpha_1(P), ..., \alpha_n(P)) \in \mathbb{R}^n$ soit de classe C^∞, où $\alpha_1(P) < ... < \alpha_n(P)$ sont les racines de P ordonnées par ordre croissant.
c) Conclure.

Exercice 22 (Réduction des formes quadratiques et lemme de Morse)**.** ($\star$)

a) Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi\colon M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^t A_0 M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que φ est différentiable en I_n. Déterminer le noyau et l'image de $d_{I_n}\varphi$.
   b) Montrer qu'il existe V, voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $\psi\colon V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tel que pour tout $M \in V$, $M = \psi(M)^t A_0 \psi(M)$.
a) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^3. On suppose que $d_0 f = 0$ et $d_0^2 f$ est de signature $(p, n-p)$.
   a) Montrer qu'il existe $Q : U \to \mathcal{S}_n(R)$ de classe C^1 telle que
$$\forall x \in U,\ f(x) = x^t Q(x) x.$$
   b) Montrer qu'il existe un difféomorphisme u entre deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$, Ω_1 et Ω_2 tel que $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$.

Exercice 23. (**Toute dérivée vérifie le TVI**). On se propose de montrer le résultat suivant :

Theorem 1 (Darboux)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors pour tout réel λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ (au sens large) il existe un réel c compris entre a et b tel que $f'(c) = \lambda$.*

a) Que se passe t'il pour $\lambda = f'(a)$ ou pour $\lambda = f'(b)$?
b) En posant $g(t) := f(t) - \lambda t$, montrer que l'on peut se ramener au cas $\lambda = 0$.
c) Montrer que f admet un extremum global sur $]a, b[$, puis conclure.