Université de Bordeaux,
L3 de Mathématiques,
Automne 2021

TD : Equations différentielles et calcul différentiel
Feuille 4

Exponentielles de matrices

Exercice 1. Calculer e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Exponentielle d'un nombre complexe)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b) Montrer que l'application $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $z = a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un morphisme d'anneaux.

c) En déduire (soigneusement) que $\varphi \circ \exp = \exp \circ \varphi$.

d) Calculer e^{tA}.

e) En déduire la solution du système

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = y(0) = 1$.

f) Déterminer l'ensemble de toutes les solutions de

$$\begin{cases} x' = -y + e^t \\ y' = x. \end{cases}$$

Exercice 4. a) Trouver des matrices A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $e^{A+B} = e^A e^B$.

b) Sous quelle condition a-t-on : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$?

Indication : si cela est vrai pour tout t, on pourra dériver...

Exercice 5 (Exponentielles sans douleur)**.** a) Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$e^{tA} = a(t)A + b(t)I_2, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Déterminer a et b lorsque les deux valeurs propres sont distinctes.

c) On suppose dans cette question que A possède une valeur propre double que l'on note λ. Montrer que l'on a $\forall t, e^{tA} = e^{t\lambda}\left[I + t(A - \lambda I)\right]$.

d) Que se passe il quand $(\lambda I_2 - A)^2 = 0$ mais pas $\lambda I_2 - A$?

e) Soit maintenant n un entier et $B \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que $\exp(B)$ est un polynome en B (i.e. il existe un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(B) = \exp(B)$).

f) Exprimer ce polynome sous l'hypothèse $(\lambda I_n - A)^n = 0$.

g) $(\star)$ Comment exprimer $\exp(A)$ en fonction des éléments charactéristiques de A (on pourra penser à la décomposition de Dunford ou à celle de Jordan)?

Remarque : La décomposition de Dunford étant efficace à calculer par ordinateur, cet exercice permet d'obetnir un algorithme de calcul de $\exp(tA)$.

Contre exemples

Exercice 6. L'équation différentielle

$$tx'(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = x_0 \neq 0$$

admet-elle une solution ?

Exercice 7. L'équation différentielle

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}, \quad x(0) = 0$$

admet-elle une solution unique ?

Résolution de systèmes

Exercice 8. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= -5x + 2y \\ y' &= 2x - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x - y \end{cases}$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' &= -x + 3y + e^t \\ y' &= -2x + 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= x + 8y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= 10x - 5y + 7z \\ z' &= 4x - 2y + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= y + z \\ z' &= z \end{cases}$$

Exercice 10. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x + y \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 11. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer l'ensemble des solutions et en donner le portrait de phase :

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x' &=& 2x & \\ y' &=& & -y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrr} x' &=& & -5x \quad -12y \\ y' &=& 2x & \quad -5y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x' &=& x & +2y \\ y' &=& 2x & +3y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrr} x' &=& -2x & +y \\ y' &=& x & -y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x' &=& 2x & +3y \\ y' &=& 2x & +3y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrr} x' &=& 2x & +3y \\ y' &=& & 2y. \end{array}\right.$$

Exercice 12. Résoudre les systèmes différentiels suivants (en la variable t) :

$$\left\{\begin{array}{rcrrrr} x' &=& & y & +z & +t \\ y' &=& x & & & +e^t \\ z' &=& x & +y & +z. & \end{array}\right.$$

Exercice 13. On considère l'équation différentielle :

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 0. \qquad (E)$$

a) Transformer cette équation d'ordre 4 en une équation d'ordre 1 : $X' = AX$ avec une matrice carrée A à définir.
b) Trigonaliser la matrice A, puis calculer $\exp(tA)$ pour toute valeur de t.
c) Résoudre (E).

Exercice 14. Résoudre l'équation différentielle :

$$x^{(3)} - 4x'' + 5x' - 2x = 0.$$

Exercice 15 (Etude de $X' = AX$ en dimension 2)**.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système:

$$(S) \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

a) Donner une solution évidente de (S).
b) On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   a) Exprimer le déterminant et la trace de A en fonction de ses valeurs propres.
   b) Que peut-on dire des valeurs propres de A si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$?

c) En déduire que si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$, alors toute solution de (S) converge vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.
d) Que dire quand $\det(A) < 0$? Montrer qu'il existe des solutions qui tendent vers $(0, 0)$ et d'autres dont la norme tend vers l'infini.
e) Si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, que peut-on dire des valeurs propres ? Montrer que les solutions sont bornées. Montrer qu'il existe des solutions périodiques. Sont-elles toutes périodiques ?

Exercice 16. (**Wronskien et zéros de solutions**) Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

a) On définit *le Wronskien* $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

1) Quelle est l'équation différentielle vérifée par W. La résoudre.

2) Montrer que si g et f sont linéairement indépendanttes alors W ne s'annule jamais.

3) Montrer que W est nulle si et seulement si elle s'annule en un point.

4) Dans le cas où f et g sont linéairement indépendantes, montrer qu'entre deux zéros de f la fonction g s'annule exactement une fois.

b) On se place maintenant dans le cas $p = 0$. Soit $M > 0$, f une solution non identiquement nulle de (E) et z solution de $z'' = -M^2 z$. En étudiant la fonction J définie par $J = f'z - z'f$, montrer que

(i) Si $\forall t, q(t) \leq M^2$, alors deux zéros consécutifs de M sont distants d'au moins $\frac{\pi}{M}$.

(ii) Si $\forall t, q(t) \geq M^2$, alors pour tout intervalle I de longueur $\frac{\pi}{M}$, f admet au moins un zéro dans I.

c) On considère l'équation

$$(B) : y'' + \frac{1}{t}y' + (1 - \frac{\lambda^2}{t^2})y = 0.$$

définie pour $t \geq 0$. Soit f une solution non identiquement nulle de (B).

1) Se ramener à la forme précédente.

2) Selon la valeur de λ, que peut-on dire de la distance entre deux zéros consécutifs de f.

d) Dans cette question, on généralise la question *b*). Soit $q_1 < q_2$ des fonctions continues. Soit y_1 (resp y_2) solution de $y_1'' + q_1 y_1 = 0$ (resp $y_2'' + q_2 y_2 = 0$). En étudiant $J := y_1' y_2 - y_2' y_1$, montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1, il y a un zéro de y_2. Ce résultat s'appelle le Lemme de Sturm.

Exercice 17 (Un système non autonome)**.** Soit $M \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice. On dit que $M > 0$ (resp $m \geq 0$) quand ses coefficients sont positifs (resp strictement positifs).

Soit $A : [0, \infty[\to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue vérifiant $\forall t, A(t) \geq 0$.

a) Soit Y une solution de $Y' = A(t)Y$ vérifiant $Y(0) > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $Y(t) > 0$.

b) Montrer qu'il existe une solution de $Y' = -A(t)Y$ vérifiant $\forall t > 0, Y(t) \geq 0$.

Systèmes non-linéaires

Exercice 18. (**Modèle Proie-Prédateurs**) On considère l'équation différentielle suivante :

$$(LV) \begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(-c + dx(t)) \end{cases}$$

Typiquement y est le nombre de poissons végétariens, et x est le nombre de poissons carnivores.

a) Le système (LV) est-il linéaire ?

b) Montrer que le problème admet une unique solution maximale.

c) Montrer que $H(x, y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$ est constante par rapport au temps.

d) $(\star)$ En déduire que la solution maximale est bornée.

e) En déduire que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.
f) Montrer que si $x(t_0) = 0$, alors $x(t) = 0$ pour tout t. Que dire de y dans ce cas là. Même question si $y(t_0) = 0$.

Exercice 19. On considère l'équation différentielle $x'(t) = \sin(tx(t))$.
a) Justifier qu'il existe une unique solution maximale.
b) Montrer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer qu'elle est paire.

Exercice 20. Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 2y(t)^2 \\ y'(t) = x(t)y(t) - y(t) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Monter que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale (X, I).
b) En utilisant l'énergie $H(x, y) = x^2 + 2y^2$, monter que cette solution est, en fait, globale.

Exercice 21. Soient $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} x'(t) = v(x(t)), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle v(x), x \rangle \leq 0$. Montrer qu'il existe une unique solution globale au problème (P).
b) On suppose à présent, que $\forall x \in S(0, 1), \langle v(x), x \rangle < 0$. Montrer que si $x_0 \in B(0, 1)$, alors la solution maximale de (P) reste dans cette boule. En déduire qu'elle est globale.
c) Montrer que le résultat de la question précédente persiste si l'on suppose seulement $\forall x \in S(0, 1), \langle v(x), x \rangle \leq 0$. On pourra comparer la solution maximale de (P) à celle de (P_ε) où v est remplacée par $v_\varepsilon(x) = v(x) - \varepsilon x$.

Exercice 22. On considère le problème de Cauchy suivant, pour $x \geq 0$:

$$(E) \quad y' = y^2 - x, \quad y(0) = 0.$$

a) Montrer que (E) admet une unique solution maximale. On la notera $(y, [0, T[)$, avec $T \in \bar{\mathbb{R}}$.
b) Donner un équivalent simple de y en 0.
c) En déduire l'existence de $\delta \in]0, T[$ tel que pour tout $x \in]0, \delta[$, on ait $y^2(x) < x$.
d) Montrer que pour tout $x \in]0, T[$, on a $y^2(x) < x$.
e) En déduire que $b = +\infty$.

Exercice 23. On considère l'équation différentielle $x' = t + x^2$ avec donnée initale $x(0) = x_0$.
a) Montrer que le problème admet une unique solution maximale.
b) Montrer que $\forall t \in I, \mathrm{Arctan}(x(t)) - \mathrm{Arctan}(x_0) \geq t$.
c) En déduire que I est majoré.
d) Montrer que x est croissante au voisinage de $b = \sup I$.
e) Donner un équivalent de $x(t)$ en b.

Exercice 24. On considère le problème de Cauchy $x'(t) = e^{-tx}$ avec la donnée initiale $x(0) = 0$.
a) Montrer que l'unique solution maximale est impaire et strictement croissante.
b) Montrer que l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$.
c) Montrer que $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, \infty)$.
d) En déduire que x admet une limite en $+\infty$. On la note l.
e) Montrer que $l > 1$.

Compléments

Exercice 25. (**Zéros isolés**) Soient $a_0, a_1, ..., a_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution de l'équation différentelle $y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)}$ a ses zéros isolés.

Exercice 26. (**Différentes versions du Lemme de Gronwall**).

a) (**Echauffement**) Soit $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (dérivable) satisfaisant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a(t)\, y(t).$$

Vérifier par la manière habituelle, puis rigoureusement, l'égalité suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = y(0)\, e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}.$$

On pourra poser $z(t) := y(t)\, e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau}$ et calculer z'.

b) Soit $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) \;\leq\; a(t)\, y(t),$$

oú a est une fonction continue. Vérifier l'inégalité suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) \;\leq\; y(0)\, e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}.$$

On pourra poser $z(t) := y(t)\, e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau}$ et calculer z'.

c) (**Version différentielle de Gronwall**) Plus généralement, si $y \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) \;\leq\; a(t)\, y(t) + b(t),$$

oú a et b sont des fonctions continues, vérifier l'inégalité suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) \;\leq\; y(0)\, e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} + \int_0^t b(\tau) e^{\int_\tau^t a(s) ds} d\tau.$$

Comme d'habitude, on pourra poser $z(t) := y(t)\, e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau}$, mais là, on vérifiera dans un premier temps l'inégalité $z'(t) \;\leq\; b(t) e^{-\int_0^t a(s) ds}$ et dans un second temps, on intégrera cette inégalité entre 0 et t.

d) (**Version intégrale de Gronwall**) Il s'agit de l'énoncé le plus puissant, car d'une part, on suppose juste ici que la fonction $y \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue (on ne la suppose pas dérivable) et d'autre part, cet énoncé permet de retrouver la version différentielle (en dérivant). Si $y \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) \;\leq\; \int_0^t a(\tau) y(\tau) d\tau \;+\; b(t),$$

où $a, b \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et si on suppose en outre que **a est positive**, montrer l'inégalité suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) \;\leq\; \int_0^t b(\tau) a(\tau) e^{\int_\tau^t a(s) ds} d\tau \;+\; b(t).$$

On pourra poser $v(t) := \int_0^t a(\tau) y(\tau) d\tau$ et montrer que $v(t) \;\leq\; \int_0^t b(\tau) a(\tau) e^{\int_\tau^t a(s) ds} d\tau$ en vérifiant tout d'abord que l'on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad v'(t) \;\leq\; a(t)\, v(t) + a(t)\, b(t),$$

puis en appliquant la version différentielle de Gronwall (vue à la question précédente) à l'application v.