université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2020/2021 CODE UE : 4TPM209 U **Analyse**	Collège Sciences &Technologies

Ce cours correspond à l'enseignement qui a été dispensé depuis 2016 par K. Kellay puis C. Menini dans l'UE Analyse de la Licence de Mathématiques. Le remaniment présent reflète les modifications au cours apportés par B. Haak.

Il s'appuie sur le programme de l'UE "Mathématiques générales" dispensée au Semestre 1. Le site interactif de ressources multimédia en ligne, le serveur `WIMS`, sera également utilisé pour la « pratique » active des exercices. Les Annales des DST et DS ainsi que des compléments de cours sont disponibles sur la plate-forme `Moodle`. La rédaction de ces notes ainsi que les dessins qui y figurent a été facilitée grâce à

http://exo7.emath.fr/un.html

De nombreux résultats et théorèmes fondamentaux d'analyse sont démontrés dans ce cours. Pour certains ils étaient déjà utilisés en étant admis.

Nous commençons avec les suites numériques dont les comportements sont étudiés en détail. Les deux grandes nouveautés seront l'introduction de la borne supérieure qui permettra de démontrer le classique résultat que « toute suite croissante et majorée converge » ; le critère de Cauchy qui permettra de décider si une suite converge alors que l'on n'a ni information sur une monotonie éventuelle, ni idée d'une limite possible.

Les fonctions numériques sont elles étudiées en détail dans le deuxième chapitre. Pour les fonctions continues nous démontrerons le théorème des valeurs intermédiaires et établirons en plus que l'image d'un intervalle fermé et borné est un intervalle fermé et borné. Pour les fonctions dérivables, en particulier, nous aurons enfin la démonstration du résultat, utilisé depuis la classe de première, liant variation d'une fonction et signe de la dérivé. Ce lien se fera grâce au théorème des accroissements finis qui, comme son nom le laisse supposer, permet de relier l'accroissement d'une fonction aux valeurs de la dérivée.
Ces comportements sont globaux, nous étudierons aussi des comportements locaux avec, entre-autre, les développements limités qui permettrons d'approcher localement une fonction par une fonction polynômiale et d'étudier son comportement au voisinage d'un point.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à la construction de l'intégrale de Riemann. Nous voulons que pour une fonction positive l'intégrale corresponde à « l'aire sous la courbe », les aires les plus simples sont celles des rectangles et ce sera le point de départ de la construction de l'intégrale avec la définition de l'intégrale de fonctions en escaliers.
Une fois l'intégrale construite, nous montrerons que les fonctions monotones sur un segment, les fonctions continues sur un segment sont Riemann intégrables. Nous retrouverons les propriétés qui avaient été admises sur l'intégrale et reverrons les nouveautés du semestre 1 telles que l'intégration par parties ou le changement de variable.

Un des objectifs de ce cours est l'entrée dans la *démonstration*, de nombreuses démonstrations suivent ici un modèle typique de l'analyse : majorer, minorer et travailler « à ε près ».

Table des matières

Chapitre 1

Culture de mathématiques

Il existe une grande variété «d'objets mathématiques» (nombres, "points", ensembles, fonctions, espaces vectoriels, etc) qui ne sont pas des objets concrets, accessibles par nos sens, mais des idées abstraites. Parfois, ces idées abstraites peuvent s'illustrer avec un dessin, mais il faut être clair dans ce cas de ne pas confondre ce dessin avec l'objet lui-même.

L'origine des objets mathématiques peut provenir de la vie de tous les jours, de sciences, de l'ingénierie, mais aussi des mathématiques elles-mêmes : dans ce cas, des conceptions et problèmes "intégrés" dans les mathématiques amènent "naturellement" à des questions qui sont déconnectés de la "vraie vie", mais tellement fascinantes qu'on ne peut les ignorer.

L'existence de certains objets ne peut pas être démontré, on les introduit de façon **axiomatique**, c'est à dire : sans les mettre en cause. De même, on s'accordre sur un jeu de règles de conclusion 'autorisés' (comme le 'tiers exclu'), et "les mathématiques" peuvent être vu comme l'ensemble des assertions déduisibles de façon "accepté" depuis les axiones. La réalité est plus compliqué, on ne peut –et on ne veut– pas énumérer tout ce qui est démontrable, mais ce qui est démontrable **et** intéressant. Evidemment "intéressant" n'est pas clairement défini et dépend du regard des mathématiciens ... ce qui transforme les mathématiques en une culture vivante qui, comme autres cultures, anglaise, espagnole ou allemande a développé une propre langue. Savoir traduire un énoncé en langue française en formulation en langue mathématique ou réciproquement est très important, et partiellemet prérequis pour ce cours, mais sera évidemment consolidé pendant le semestre.

Une culture et une langue viennent nécessairement avec des "implicites", et il convient de les apprendre. Voici quelques uns. On utilisera

1. des lettre minuscules (romaines ou greques) pour des "points", ici souvent pour des nombres réelles. Plus précisément, on utilisera i, j, k, l, m, n généralement pour des entiers, et des lettres grecs ou romains du début (a, b, c, d) ou de la fin de l'alphabet (s, t, u, v, w, x, y, z) pour des réels. Ainsi on écira pour une suite $a_n = (-1)^n$ et il est sous-entendu que n est entier (l'expression n'est même pas définie sinon). D'autre côte si la fonction f est donnée par $f(x) = \cos(x)$ il est sous-entendu que x est un nombre réel...
2. On utilise de lettres majuscules (romaines ou greques) pour des ensembles (contenant des points). Distinguer une sorte de hierarchie par l'éciture est utile. On écrira donc $a \in A$ pour dire que le point a est dans l'ensemble A. Il faudra distinguer "$\in$" et "$\subseteq$". Par exemple $a \in A$ si et seulement si $\{a\} \subseteq A$. A quoi servent les accolades $\{,\}$ ici ?
3. Si on a des collections d'ensembles, comme l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$, il convient de changer la notation. Souvent une lettre cursive majuscule est employé, comme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{A : A \subseteq \mathbb{N}\}$. Ainsi, $\{1, 3, 42\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. L'ensemble $\{1, 3, 42\}$ est devenu un "point" dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
4. La notation $=:$ ou $:=$ signifie que le coté muni du double-point est défini comme étant égal à ce qui est écrit l'autre coté. Parfois on va en plus écrire "def." au-dessus le signe d'égalité pour insister sur le caractrère de définition.

Aucune langue naturelle est totalement libre de contextualisation : pas besoin de présenter des exemples dans la langue Française à ce point ... il en est de même pour les mathématiques. Un exemple :
On écrira $I = (a, b)$ pour les réels x strictement compris entre a et b, donc

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$$

même si, en algèbre linéaire on peut noter $(1, 2)$ pour les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^2$. Dans le contexte, il est généralement clair de quoi on parle (et sinon, il faut le préciser, évidemment).

Il est fatidique de vouloir mettre toute la notation du cours ici en préface. Elle sera introduite au fur et à mesure dans le texte, et d'éventuels ambiguités sont une bonne occasion de communiquer pour les soulever !

Chapitre 2

Suites

2.1 Les nombres réelles

Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble non-vide, muni de deux opérations “internes”, le “plus” $+$, qui rend $(\mathbb{K}, +)$ en un groupe commutatif (l’élément neutre est appelé 0), puis la multiplication $\cdot$ qui rend $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \backslash \{0\}$ en un groupe commutatif. Son neutre sera noté 1. Finalement, les lois de “distributivité” gèrent l’entre-jeu des deux opérations :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

pour tout $a, b, c \in \mathbb{K}$. L’exemple le plus simple d’un corps est $\mathbb{F}_2$, constitué de deux éléments, $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$: l’addition est faite “modulo 2”, et le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_2^*$ est réduit à un seul élément, et donc trivial. Néanmoins, ce corps est un objet intéressant en algèbre, mais surtout en informatique : l’addition est le XOR et la multiplication le AND logique sur les bits.... Cela dit, les “corps finis” sont essentiellement sans intérêt pour l’analyse : on cherche des objets plus “riches”. Avant d’avancer, testez les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ pour voir si vous trouvez des corps parmi eux !

Rappelons ensuite la définition d’un ordre total : on appelle une relation (noté “$\leqslant$”) un ordre si (a)–(c) sont satisfaits, et on l’appelle un ordre total si (a)–(d) sont satisfaits, où (pour tout x, y, z respectifs),

$$\begin{array}{lll} (a) & x \leqslant x & \text{(réflexivité)} \\ (b) & x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x \quad \text{alors} x = y & \text{(anti-symétrie)} \\ (c) & x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z \quad \text{alors} x \leqslant z & \text{(transitivité)} \\ (d) & x \leqslant y \text{ ou (inclusif) } y \leqslant x & \text{(totalité)} \end{array}$$

Alors $\mathbb{Q}$ est un corps (vous l’aurez trouvé) qui est “ordonné” via la relation d’ordre $\leqslant$ habituelle. On note que $\mathbb{C}$ est un corps qui n’a pas d’ordre (total) naturel. Total veut dire : n’importe quels deux éléments sont comparables – mais qui est plus grand : $2 + i$ ou $1 + 2i$?

Remarque

L’entre-jeu d’ordre et des opérations d’addition et multiplication est la base d’un grand nombres de preuves en analyse. L’archétype d’argument est : Soit Q une quantité. Alors

$$Q \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad Q \leqslant \varepsilon.$$

En effet, si Q était strictement positive, alors le choix $\varepsilon = Q/2$ amènerait à une contradiction ! Dans une preuve, ce principe est rédigé souvent de la façon suivante :

«Soit $\varepsilon > 0$. Alors (tata-ti et tata-ta) on a $Q \leqslant \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et vu que $Q \geqslant 0$, on déduit que $Q = 0$.»

Le corps $\mathbb{Q}$ a une autre propriété très utile : il est “Archimédien”. Cela signifie :

$$\text{pour tout } x, y > 0 \text{ il existe un } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que} \qquad n \cdot x = (x + x + .. + x) > y.$$

ou, en échangeant les rôles de x, y puis en divisant par n :

$$\text{pour tout } x, y > 0 \text{ il existe un } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que} \qquad 0 < x/n < y.$$

Ici, on peut même diviser par $x > 0$ et obtenir une version marquante : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$0 < \tfrac{1}{n} < \varepsilon.$$

Remarque

Une conséquence de la propriété Archimédienne est que l'on peut remplacer le «Soit $\varepsilon > 0$» évoqué dans la remarque en haut par un

«Soit $n \geqslant 1$. Alors (tata-ti et tatat-ta) $Q \leqslant 1/n$.
Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 1$ et vu que $Q \geqslant 0$, on déduit que $Q = 0$.»

Pour aller plus loin

Mais qui qui alors est $\mathbb{R}$? C'est une curieuse question, après avoir travaillé pendant des années avec les nombres réelles ...

Une réponse complète, historique, remplirait une bonne partie de ce polycopié tout seul. Voici une tentative d'aperçu très brève : depuis toujours l'homme a crée de son esprit des objets qui l'aident à comprendre son monde et de résoudre des problèmes. Depuis (au moins) l'antiquité, la géométrie prenait une place importante car elle permettait de construire de bâtiments, bateaux, etc. Encore Galilé notait [a] que le “livre de la nature est écrit dans le langage des mathématiques, dont les lettres sont les triangles, les cercles et autres figures géométriques”.

Depuis Newton et Leibniz, le “calcul infinitésimal”, l'idée de quantités “arbitrairement petites” commence à s'établir malgré des résistances philosophiques, des contradictions et le fait que ni les nombres réelles, ni la notion d'une fonction étaient bien définies. Son acception se basait sur le fait que le calcul, aussi obscure qu'il pouvait apparaître, permettait de résoudre des problèmes concrètes – quelque part, peu importe comment.

A partir de 1820, sous l'influence de Augustin-Louis Cauchy le concept de “limite” apparaît, malgré des flous importants. Il a fallu 50 ans pour clarifier ses idées, et développer “l'analyse” de nos jours : ceci est en grandes parties le travail des trois mathématiciens, Karl Weierstraß, Richard Dedekind et Georg Cantor : les deux derniers ont développés le concept d'un ensemble “abstrait”, Cantor notamment celui des ensembles “infinis” (ce qui nécessita briser un dogme remontant à Aristote), Dedekind s'en est saisi pour *construire* les nombres réelles depuis les nombres naturelles de façon rigoureuse, et enfin Weierstraß à formulé le concept de “limite” comme nous la connaissons aujourd'hui, en se basant sur Dedekind. L'objet en lui-même nous semble “évident” aujourd'hui ...

Pour l'antiquité, les mathématiques étaient réduites à un outil pour la physique : les concepts modernes, “abstraites” brisent avec cette tradition, mais pas complètement. Car il est bien raisonnable de vouloir associer à la diagonale d'un carré une notion de longueur. Or, le carré unitaire à pour diagonale $X = \sqrt{2}$, qui n'est –à l'horreur des grecs de l'antiquité– pas rationnelle. Il a donc fallu “inventer” un objet convenable. L'étude de l'équation $X^2 = 2$ que satisfait la racine de 2 amène rapidement à autres équations polynomiales, et de leurs racines. Un domaine d'application sont les finances, sous forme de taux d'intérêt. Mais quoi alors de $X^2 = -1$? Évidemment, aucun carré physique n'a une aire négative, et Aristote aurait refusé qu'un tel objet “imaginaire” existe. Son introduction sous la notation $X = i$ est une idée de Descartes, pour marquer leur “absence de réalité”. Seulement les travaux de Euler et Gauß ont permit leur acceptation : le développement des “nombres complexes” étaient donc un processus qui a pris des siècles – mais se résume aujourd’hui dans une page d’un polycopié. Et malgré le mot “imaginaire” qui suggère plus une folie de l’esprit qu’un objet utile, la physique moderne serait impensable sans elle !

Les nombres réelles sont le cadre de ce cours, et nous allons voir que le concept fondamental pour la suite sera celui des bornes inférieures et supérieures : il est résultat de la construction (trop longue pour ce cours) de Dedekind, et nous allons simplement l’utiliser de façon axiomatique, donc “sans la remettre en question”, voir le “théorème” 1.6 en bas, qui pour nous sera un axiome. A la fin du chapitre je présenterai une explication plus complète de l’importance de cette propriété.

a. “Il Saggiatore”, Cap. IV, Rome, 1623

2.1.1 Borne supérieure et inférieure

Définition 1.1. (Majorants, minorants)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Un réel M est un ***majorant*** de A si : $\forall x \in A \;\; x \leqslant M$.

Un réel m est un ***minorant*** de A si : $\forall x \in A \;\; x \geqslant m$.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est ***majorée*** (resp. ***minorée***).

Définition 1.2. (Maximum, minimum)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Un réel α est un ***plus grand élément*** de A s’il appartient à A et s’il est un majorant de A, c’est-à-dire
$$\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A \;\; x \leqslant \alpha.$$
S’il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors $\max A$.
- Le ***plus petit élément*** de A, noté $\min A$, s’il existe est le réel α tel que $\alpha \in A$ et $\forall x \in A \;\; x \geqslant \alpha$. C’est-à-dire, c’est un élément de A qui est un minorant de A.

Le plus grand élément s’appelle aussi le ***maximum*** et le plus petit élément, le ***minimum***. Il faut garder à l’esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n’existent pas toujours.

Exemple 1.3

- $\max[a, b] = b$, $\min[a, b] = a$.
- L’intervalle (a, b) n’a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.
- L’intervalle $[0, 1)$ a pour plus petit élément 0 et n’a pas de plus grand élément.

Exercice

Soit $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \;,\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. A n’a pas de plus grand élément : montrer que tout majorant M de A est tel que $M \geqslant 1$ puis montrer que $1 \notin A$.
2. $\min A = 0$: vérifier $0 \in A$ et 0 minorant de A.

Définition 1.4. (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

1. α est la ***borne supérieure*** de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.
2. α est la ***borne inférieure*** de A si α est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Exemple 1.5

- $\sup\,[a, b] = b$,
- $\inf\,[a, b] = a$,
- $\sup\,(a, b) = b$,
- $\inf\,(a, b) = a$,
- $(0, +\infty)$ n'admet pas de borne supérieure,
- $\inf\,(0, +\infty) = 0$.

Remarque

Si un ensemble A a un plus grand élément (respectivement plus petit élément) alors il est égal à la borne supérieure de A (respectivement borne inférieure de A).

Théorème 1.6

- Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.
- Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Théorème 1.7. (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel α tel que

(i) si $x \in A$, alors $x \leqslant \alpha$,

(ii) pour tout $y < \alpha$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.

(ii)' pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < x$.

Démonstration

1. Montrons que $\sup A$ vérifie ces deux propriétés. La borne supérieure est en particulier un majorant, donc vérifie la première propriété. Pour la seconde, fixons $y < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A alors y n'est pas un majorant de A. Donc il existe $x \in A$ tel que $y < x$. Autrement dit $\sup A$ vérifie également la seconde propriété.
2. Montrons que réciproquement si un nombre α vérifie ces deux propriétés, il s'agit de $\sup A$. La première propriété montre que α est un majorant de A. Supposons par l'absurde que α n'est pas le plus petit des majorants. Il existe donc un autre majorant y de A vérifiant $y < \alpha$. La deuxième propriété montre l'existence d'un élément x de A tel que $y < x$, ce qui contredit le fait que y est un majorant de A. Cette contradiction montre donc que α est bien le plus petit des majorants de A, à savoir $\sup A$.

Exemple 1.8

Reprenons l'exemple de la partie $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Nous avions $\min A = 0$. Lorsque le plus petit élément d'une partie existe alors la borne inférieure vaut ce plus petit élément : donc $\inf A = \min A = 0$.
2. *Première méthode pour* $\sup A$. Montrons que $\sup A = 1$ en utilisant la définition de la borne supérieure. Soit M un majorant de A alors $M \geqslant 1 - \frac{1}{n}$, pour tout $n \geqslant 1$. Donc à la limite $M \geqslant 1$. Réciproquement si $M \geqslant 1$ alors M est un majorant de A. Donc les majorants sont les éléments de $[1, +\infty[$. Ainsi le plus petit des majorant est 1 et donc $\sup A = 1$.
3. *Deuxième méthode pour* $\sup A$. Montrons que $\sup A = 1$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.
   (i) Si $x \in A$, alors $x \leqslant 1$ (1 est bien un majorant de A) ;
   (ii) pour tout $y < 1$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$: en effet prenons n suffisamment grand tel que $0 < \frac{1}{n} < 1 - y$. Alors on a $y < 1 - \frac{1}{n} < 1$. Donc $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$ convient.

   Par la caractérisation de la borne supérieure, $\sup A = 1$.

2.2 Suites réelles

Définition 2.9

Soient E et F deux ensembles. Une ***fonction*** de E dans F est une correspondance entre E et F telle qu'à tout élément x de E corresponde au plus un élément y de F. On note $f : E \to F$.

On appelle ***domaine de définition*** d'une fonction $f : E \to F$, le sous-ensemble de E noté $\mathcal{D}_f$ tel qu'à tout élément x de $\mathcal{D}_f$ corresponde exactement un élément y de F.

Une fonction peut être donné par une formule, comme dans l'exemple

$$f : x \mapsto x^2 + 2x - 1$$

mais on peut aussi définir une fonction par une "association" entre éléments. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ qui associe à tout $n \geqslant 1$ le n-ième nombre premier ne permet (à notre connaissance) pas de formule, mais il s'agit d'une fonction bien définie.

2.2.1 Définition d'une suite numérique

Définition 2.10

- Une ***suite numérique*** est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème ***terme*** ou ***terme général*** de la suite.

Dans ce polycopié nous dirons « suite » pour « suite numérique ».

La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). On considère des fois des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$. On parle aussi de la "queue de la suite" dans ce cas.

Exercice 2.11

Expliquer la différence entre la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et l'ensemble de ses valeurs $\{u_n : n \geqslant 0\}$.

2.2.2 Limites, convergence

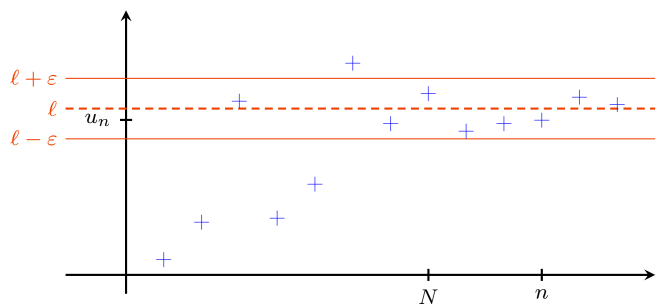
La définition suivante est centrale pour toute l'analyse.

Définition 2.12

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour ***limite*** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)\,.$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** ℓ.



Pour aller plus loin

On observe que l'utilité de la valeur absolue dans la définition est celle de calculer une distance entre le membre de la suite u_n et la limite ℓ. Cela permet une généralisation importante : Soit X un ensemble, et $d : X \times X \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $x, y, z \in X$ on ait

(positivité)	$d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0$ implique $x = y$.
(symétrie)	$d(x,y) = d(y,x)$
(inégal. triang.)	$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

alors on appelle d une distance et le couple (X,d) un *espace métrique*.

On voit que $d(x,y) = |x-y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$ et que l'idée de la limite est de dire que les distances entre u_n et ℓ deviennent "arbitrairement petites".

Exercice 2.13

Imaginons qu'on ait écrit en haut

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Est-ce que cela a une implication sur la notion de «suite convergente» ? Prière de ne pas continuer avant d'être au clair sur cette question !

Exemple 2.14

Soit $a_n = \ell$ (la suite constante). Elle converge, avec limite $a = \ell$. Preuve :
Pour vérifier la définition, nous parcourons les quantificateurs dans la définition de gauche à droite. Tout «$\forall$..» sera traduit par un «soit ...» alors que les « $\exists$.. » sont des choses qu'il faut "amener" lors de la preuve. Donc :

- Soit $\varepsilon > 0$ *(ceci correspond au $\forall \varepsilon > 0$ dans la définition).*
- On pose $N = 0$. Soit $n \geqslant N$. Nous avons bien que $|a_n - \ell| = 0 < \varepsilon$. *(attention : c'est l'acteur qui amène le $N = 0$ ici, pour assurer le "$\exists N$" ! Il se trouve que N ne dépend pas de ε, mais en général c'est le cas. D'où l'importance de parcourir les quantificateurs dans le bon ordre.)*

Exercice 2.15

Vérifier que les suites suivantes sont convergentes, en vous inspirant de l'exemple ci-dessus.

1. $b_n = \frac{1}{n}$. Limite $b = 0$. Quel est le lien avec l'axiome Archimédien de $\mathbb{R}$?
2. $c_n = \frac{n}{n+1}$. Limite $c = 1$. Se ramener au cas précédent !
3. $d_n = \frac{n}{4^n}$. Limite $d = 0$. Montrer par exemple d'abord que $n \leqslant 2^n$. Il suivra que $|d_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Remarque

Une difficulté est qu'il faut connaître un «candidat» $\ell \in \mathbb{R}$ avant de pouvoir passer à la preuve de la convergence. Le serpent semble se mordre la queue. La réponse mathématique consiste à se donner plein d'outils plus ou moins abstraits sur des suites. On gagnera de la compréhension, et finalement aussi du temps sur un exercice calculatoire.

Définition 2.16

Appelons une partie V des nombres réels un voisinage de ℓ, s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ est contenu dans V.

Convergence d'une suite vers ℓ veut alors dire : tout voisinage de ℓ contient tous les éléments de la suite, à un nombre fini d'exceptions près. Expliquer cette formulation. On y reviendra plus tard !

Nous donnons ici une autre caractérisation par les suites de la borne supérieure.

Propriété 2.17

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel α tel que

(i) α est un majorant de A,

(ii) il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α.

Démonstration

A faire en revenant aux définitions de borne supérieure et de limite.

2.2.3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***majorée*** si : $\exists M\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***minorée*** si : $\exists m\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\geqslant m$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***bornée*** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n|\leqslant M.$$

Proposition 2.19

Toute suite convergente est bornée.

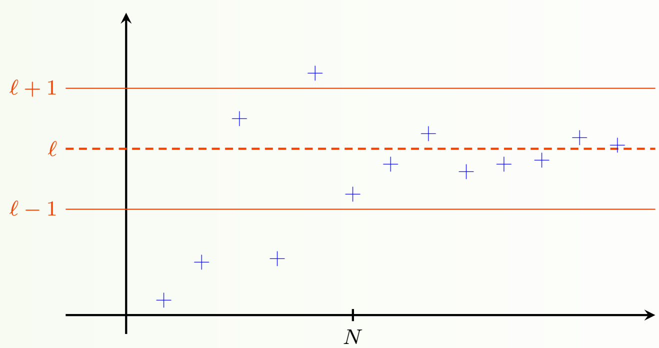
Démonstration

Plan On va chercher á montrer qu'il existe $M>0$ tel que pour tout entier n, $|u_n|\leqslant M$.

1. En utilisant la définition de la convergence on trouve un indice à partir duquel tous les termes de la suite sont majorés en valeur absolue par $|\ell|+1$.
2. Il reste un nombre fini de termes, on peut toujours en trouver un majorant et un minorant.

Détail 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel ℓ. En appliquant la définition de limite (définition 2.12) avec $\varepsilon=1$, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout $n\geqslant N$ on a $|u_n-\ell|<1$, et donc pour tout $n\geqslant N$ on a

$$|u_n|=|\ell+(u_n-\ell)|\leqslant|\ell|+|u_n-\ell|<|\ell|+1.$$



2. Donc si on pose

$$M=\max(|u_0|,|u_1|,\cdots,|u_{N-1}|,|\ell|+1)$$

on a alors : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ |u_n|\leqslant M$.

Par conséquent une suite non-bornée n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge. Attention aux erreur logiques ! La réciproque «Toute suite bornée est convergente» est fausse : En effet la suite $a(n)=(-1)^n$ ne converge pas. Pour $\varepsilon=1$ il existe aucun rang à partir duquel on aurait $a_n-1|\leqslant\varepsilon$.

2.2.4 Calculer avec des limites

Les trois observations suivantes découlent immédiatement de la définition de la limite :

Propriété 2.20

1. On a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ssi $\lim_{n\to\infty} a_{n+n_0} = a$.
2. On a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ssi $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$. Attention : «$\Leftarrow$» est fausse en général !

Souvent il est plus simple de comparer deux objets au lieu d'un calculer un. On a le résultat suivant :

Proposition 2.21. (Monotonie de la limite)

Soit (a_n) et (b_n) deux suites convergentes, avec $a_n \leqslant b_n$ à partir d'un certain rang. Alors $a \leqslant b$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang N_a avec $|a_n - a| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant N_a$ et un rang N_b avec $|b_n - b| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant N_b$. On pose $N = \max(N_a, N_b)$ pour assurer les deux en même temps. Du fait que $x \leqslant |x|$ il suit que

$$a - b = (a - a_N) + \underbrace{(a_N - b_N)}_{\leqslant 0} + (b_N - b) \leqslant (a - a_N) + (b_N - b) \leqslant |a - a_N| + |b_N - b| \leqslant \varepsilon.$$

Vu que donc $a \leqslant b + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a $a \leqslant b$.

Utilité calculatoire la la monotonie : Si (u_n) est bornée et $v_n \to 0$ alors $u_n \cdot v_n \to 0$: en effet $|u_n v_n - 0| \leqslant C|v_n| \to 0$.

Exemple 2.22

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite donnée par $u_n = \cos(n)$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est celle donnée par $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

Attention : la monotonie n'est pas stricte : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on ne peut affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.

Utilité théorique de la monotonie :

Propriété 2.23

Si une suite converge, sa limite est unique.

En effet, supposons qu'on ait deux limites, a, b, autrement dit : $a_n \to a$ et $a_n \to b$. Il suffit de poser $b_n = a_n$. Puisque $a_n \leqslant b_n$ la proposition donne $a \leqslant b$, et puisque $b_n \leqslant a_n$ la proposition donne $b \leqslant a$.

Dans la même manière,

Proposition 2.24. (Encadrements de suites, théorème «des gendarmes»)

Soit $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites avec $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$ ainsi que $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$. Alors $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Voici un simple exemple d'application : Soit $c_n = \frac{n^2+n}{4^n}$. On a

$$\tfrac{n^2+0}{4^n} \leqslant \tfrac{n^2+n}{4^n} \leqslant \tfrac{n^2+n^2}{4^n}$$

et les deux suites encadrantes tendent vers zéro ! Ceci est la façon très propre de «négliger des termes d'ordre inférieure». On verra ces arguments d'encadrement en multiples exercices et même preuves, comme dans le résultat suivant :

Proposition 2.25

Soit $(a_n), (b_n)$ deux suites convergentes, avec limites $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

1. La suite $c_n = a_n + b_n$ converge vers $c = a + b$, la suite $d_n = a_n \cdot b_n$ converge vers $d = a \cdot b$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $c_n = \lambda a_n$ converge vers $c = \lambda a$.
3. Si $b \neq 0$, alors on a $b_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n \geqslant N$, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N = \max(N_a, N_b)$ assurant que $|a_n - a| \leqslant \varepsilon/2$ et $|b_n - b| \leqslant \varepsilon/2$ pour tout $n \geqslant N$. la première assertion suit par inégalité triangulaire. Ensuite, la décomposition $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$ implique que

$$|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|.$$

Or (a_n) est convergente, donc bornée (disons, par une constante $C > 0$) il existe un rang N_b assurant que $C|b_n - b| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant N_b$. De même il existe un rang N_a assurant que $|a_n - a||b|| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant N_a$. Alors pour $n \geqslant N := \max(N_a, N_b)$ on a bien $|a_n b_n - ab| \leqslant \varepsilon$. Ceci est en particulier vrai pour la suite $b(n) = \lambda$!

Reste le dernier point. Pour le choix $\varepsilon = |b|/2$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|b_n - b| \leqslant |b|/2 \qquad \text{donc} \qquad |b_n| = |b - (b - b_n)| \geqslant |b| - |b_n - b| \geqslant |b|/2 > 0.$$

Finalement, pour ces $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n\, b - a\, b_n}{b_n\, b}\right| \leqslant \frac{2}{|b|^2}\, |a_n\, b - a\, b_n|$$

Par le premier point $\lim a_n\, b - a\, b_n = 0$. L'encadrement de la différence des quotients par deux suites qui convergent vers zéro achève la preuve.

Exemple 2.26

Soit $a_n = \frac{3n^2+15n}{n^2-2}$. On **ne peut pas** argumenter

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 3n^2 + 15n}{\lim_{n\to\infty} n^2 - 2}$$

car aucune des deux limites n'existe ! Par contre il y a une ruse simple pour isoler le terme dominant qui nous intéresse :

$$(*) \qquad a_n = \frac{3 + 15/n}{1 - 2/n^2}$$

Les suites $b_n = 15/n$ et $c_n = 2/n^2$ tendent vers zéro, et il suit par la proposition que $\lim a_n = \frac{3}{1} = 3$.

Remarque

Il est important d'observer qu'on manipule l'expression en $(*)$ «dans un sens», mais qu'on doit argumenter «dans l'autre sens» : en effet, $(*)$ **n'implique pas** que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + 15/n}{\lim_{n\to\infty} 1 - 2/n^2}.$$

A la place : **Parce que** les deux limites $\lim_{n\to\infty} 3+15/n = 3$ et $\lim_{n\to\infty} 1-2/n^2 = 1$ existent séparément, (et $b = 1 \neq 0$) leur quotient vérifiera

$$\frac{3}{1} = \frac{\lim_{n\to\infty}\ 3 + 15/n}{\lim_{n\to\infty}\ 1 - 2/n^2} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2.2.5 Limite infinie

La divergence des suites $a_n = (-1)^n$ et $b_n = n^2$ est de nature différente. La première de peut pas se décider entre les deux points ± 1, tandis que les valeurs de la deuxième iront au-delà de toute borne finie. On a envie de dire qu'elle «converge vers l'infini». Mais cette terminologie est malheureuse et à éviter, bien qu'il existent des façons précises de parler de convergence vers l'infini. Mais cela sème plus de confusion que de bien. On emploie une astuce linguistique.

Définition 2.27

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n > A)$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $-\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n < -A)$$

Remarque

1. Par abus de notation on écrit parfois $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ou parfois $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$.
3. L'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$. On aurait aussi pu définir la limite par la proposition :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$, où l'on a remplacé la dernière inégalité stricte par une inégalité large.

Définition 2.28

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***convergente*** si elle admet une limite ***finie***. Elle est ***divergente*** sinon (c'est-à-dire : soit elle n'admet pas de limite finie, malgré le fait qu'elle soit bornée (exemple $a_n = \sin(n)$), ou bien, elle tend vers $\pm\infty$ (exemple : $a_n = n^2$). Et parfois les 2 à la fois : $a_n = n^2 \sin(n)$).

Propriété 2.29. (Opérations sur les limites infinies)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (abus de notation !). Alors

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$ (dans le sens propre de la limite).
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un nombre $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.
5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \geqslant u_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration

Nous n'allons pas tout prouver mais seulement 1. Les autres se démontrent de manière tout à fait semblable. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $v_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. On obtient alors $0 \leqslant \frac{1}{v_n} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On a donc montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{v_n} - 0\right| = 0$.

2.2.6 Suite croissante, décroissante

Puisque des suites sont des fonctions $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, les notions de monotonies sont les mêmes que pour des fonctions. Rappel :

Définition 2.30

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***croissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement croissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***décroissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement décroissante*** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement monotone*** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **à termes strictement positifs**, elle est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = (-1)^n/n$ pour $n \geqslant 1$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $1/2$ (borne atteinte en $n = 2$), minorée par -1 (borne

atteinte en $n = 1$).
– La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte pour $n = 1$), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.

Remarque

– Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
– Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.
A faire en exercice.

2.2.7 Suites monotones et bornées

Théorème 2.31. (convergence monotone bornée)

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Démonstration

Il suffira de démontrer le théorème dans le cas "croissant", car si (a_n) décroît, alors $(-a_n)$ croît. Soit donc (a_n) supposée croissante, et pose $A := \{a_n : \quad n \geqslant 1\}$. Soit $S := \sup(A)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant, il existe donc un n_0 tel que

$$S - \varepsilon \leqslant a_{n_0} \leqslant S$$

Par monotonie, on a alors

$$\forall n \geqslant n_0 : \qquad S - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant S$$

ou bien $|S - a_n| \leqslant \varepsilon$. On voit que (a_n) converge vers son sup.

2.2.8 Sous-suites !

L'idée de sous-suites est assez simple : au lieu de regarder toute la suite (a_n) on s'intéresse à une sous-suite, par exemple pour passer de

$$(a_n)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots)$$

à

$$(a_{2n})_{n\geqslant 1} = (2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$$

où nous avons extraits les indices paires. On peut aussi considérer la suite $(a_{N+k})_{k\geqslant 1}$ pour "ôter quelques éléments" de la suite. Quand la situation est simple, on peut noter (a_{2n}) ou (a_{N+k}), mais on vient de voir que la notation a_{n_k} avec double-souscrit devient encombrant. Pour une notation "générale", on préfère l'écriture suivante :

Définition 2.32

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une ***suite extraite*** ou ***sous-suite*** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque

On peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Exemple 2.33

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

- Si on considère $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\varphi(n) = 2n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\varphi(n)} = (-1)^{2n} = 1$, donc la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.
- Si on considère $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\alpha(n) = 2n+1$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\varphi(n)} = (-1)^{2n+1} = -1$, donc la suite $(u_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -1.
- Si on considère $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\psi(n) = 3n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\psi(n)} = (-1)^{3n} = \left((-1)^3\right)^n = (-1)^n$. La suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égale à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 2.34

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

Démonstration

A faire en revenant à la définition de limite et en utilisant que pour tout entier n, $\varphi(n) \geqslant n$.

Corollaire 2.35

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une suite extraite divergente, ou bien si elle admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple 2.36

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 (en fait ces deux sous-suites sont constantes). On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Pour aller plus loin: Exercice

Une suite numérique (x_n) converge vers ℓ si, et seulement si toute sous-suite de (x_n) admet une sous-sous-suite qui converge vers ℓ.
Que se passe-t-il si on modifie la dernière phrase en “admet une sous-sous-suite qui converge”, en supprimant “vers ℓ” ?

Définition 2.37

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une ***valeur d'adhérence*** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si ℓ est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors, avec la propriété 2.34, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de la suite.

2.2.9 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 2.38. (Bolzano-Weierstrass)

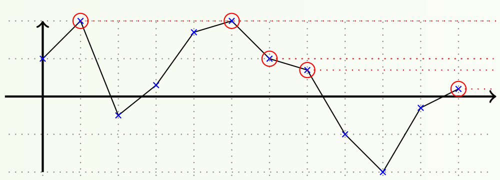
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Le théorème permet plusieurs démonstrations. Nous avons choisi une inhabituelle, mais magistralement belle. Elle repose sur un petit lemme qui est très curieux :

Lemme 2.39. (de la sous-suite monotone)

Toute suite réelle possède une sous-suite monotone.

Démonstration



Soit (x_n) une suite réelle (sur l'image à coté on a relié les valeurs de la suite ce qui fait une sorte de «chaîne de montage») Appelons un élément x_N de la suite un «sommet» si pour tout $k \geqslant N$ on a $x_k \leqslant x_N$. Autrement dit : X_N «domine» la queue de la suite. Dans l'exemple, si le dernier point dessiné est un sommet, alors tous les points entourés en rouge sont des sommets.

Évidemment, il n'y a pas de raison qu'un somme existe dans la suite ! Par exemple la suite définie par $x_n = n$ n'en a pas. Pour la suite définie par $x_n = -n$ tout point est un sommet. Quoi qu'il en soit, il y a deux cas :

1. Soit, il y a un nombre infini de sommets. Dans ce cas la suite des sommets décroît, et on a trouvé une sous-suite monotone !
2. Soit il n'y a pas un nombre infini de sommets. Il existe donc un rang N à partir duquel il n'y a plus aucun sommet. Soit $\varphi(0) := N$. Puisque x_N n'est pas sommet, il doit exister un successeur x_{N+k+1} qui est strictement plus grand. On pose $\varphi(1) := N + k_1$. Mais x_{N+k_1} n'est pas sommet non plus, il doit donc exister un successeur $x_{N+k_1+k_2}$ qui est strictement plus grand encore. On pose $\varphi(2) := N + k_1 + k_2$. ETC. De proche en proche on construit ainsi une sous-suite extraite qui est (strictement) croissante !

Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstraß

Soit (x_n) une suite réelle bornée. Par le lemme elle admet une sous-suite monotone - qui est bornée comme sous-suite d'une suite bornée. On conclut par le Théorème 2.31.

2.3 Complétude

Il est bien connu que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Il est remarquable que les axions de corps et d'ordre utilisés jusqu'alors pour traiter des suites sont valables également pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Il suit qu'on ne peut pas déduire l'existence d'une solution de $x^2 = 2$ de ces axiomes. La solution mathématique est de combler ce manque de complétude des nombres rationnels en introduisant un nouveau objet qui nous semble évident, les nombres réels. On peut ce faire de façon axiomatique (plus facile pour l'étudiant en Licence), ou les construire à partir de $\mathbb{N}$ (plus difficile, et typiquement discuté en master). Nos poursuivons l'idée axiomatique. Il y a plusieurs façons de l'approcher, une d'entre elles est la suivante :

Définition 3.40

Une suite (u_n) est appelé une suite de Cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geqslant N : \qquad |u_n - u_m| < \varepsilon$$

En prose : pour tout ε il existe un rang à partir duquel les différences mutuelles (de membres de la suite) deviennent plus petits que ε.

Lemme 3.41

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Démonstration

Soit $\ell = \lim u_n$, et $\varepsilon > 0$ donné. Par la convergence de (u_n) il existe un rang N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geqslant N$. Il suit que, pour $n, m \geqslant N$, que

$$|u_n - u_m| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

La question de la réciproque (c'est à dire : si des suites de Cauchy convergent) dépend du «cadre» : dans $\mathbb{Q}$, la suite

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \frac{14}{10}, \qquad a_2 = \frac{141}{100}, \qquad a_3 = \frac{1\,414}{1000}, \qquad a_4 = \frac{14\,142}{10\,000}, \qquad a_5 = \frac{141\,421}{100\,000},$$

donc la suite du développement décimal de $\sqrt{2}$, n'a pas de limite rationnelle !

Lemme 3.42

Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration

A faire en cours.

Lemme 3.43

Soit (a_n) une suite de Cauchy qui admet une sous-suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite ℓ. Alors (a_n) converge vers ℓ.

Théorème 3.44

Toute suite *réelle* de Cauchy converge (dans $\mathbb{R}$ comme "cadre").

Démonstration

Soit (a_n) une suite de Cauchy. Alors (a_n) est bornée par le Lemme 3.42, contient donc une sous-suite connvergente d'après Bolzano-Weierstraß. Ceci entraîne sa convergence selon le Lemme 3.43.

Remarque 3.45

Le point important de cet critère de Cauchy sur la convergence consiste à ne pas devoir connaître le «candidat de la limite» ℓ avant de démontrer la convergence. La propriété de Cauchy est intrinsèque à la suite elle-même.

2.3.1 Suites adjacentes

Définition 3.46

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites ***adjacentes*** si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant v_n$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Remarque

Dans la définition précédente le point 2 découle des points 1 et 3. En effet avec 1, la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Elle converge d'après 3, donc grâce à la décroissance on a que tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à la limite $\ell = 0$.

Théorème 3.47. (Convergence des suites adjacentes)

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration

La suite (u_n) est de Cauchy : en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que $v_n - u_n < \varepsilon$. Il suit que

$$u_N \leqslant u_{N+k} \leqslant v_{N+k} \leqslant v_N$$

et donc $|u_n - u_m| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geqslant N$. Par le critère de Cauchy, (u_n) converge vers une limite ℓ. Par le même argument, (v_n) tend vers une limite ℓ'. Observons que

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - v_n + v_n - \ell'| \leqslant |\ell - u_n| + |u_n - v_n| + |v_n - \ell'|$$

Les trois derniers termes tendent vers zéro, leur somme alors aussi. Il suit que $\ell = \ell'$.

Pour aller plus loin

On peut reformuler le concept de suites adjacentes par celui de "segments emboîtés" : En formant $I_n = [u_n, v_n]$, on parle d'une suite de "segments emboîtés" si

1. (emboîtement) $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$
2. (les diamètres s'écrasent) la longueur $|I_n| = v_n - u_n$ tend vers zéro.

En termes de segments emboîtés, le théorème se formulerait comme
Théorème : L'intersection d'une suite de segments emboîtés est non-vide.
Observons que du fait que les diamètres s'écrasent, l'intersection de tous les I_n ne peut

contenir deux éléments distincts : en effet, si $a < b \in I_n$ pour tout n, alors $|I_n| \geqslant |a-b|$. De cet fait, on a alors $\bigcap I_n = \{x\}$: l'intersection (puisque non-vide) est nécessairement réduit à un seul point x. Mais qui est-ce ? ? ?

Exemple 3.48

La suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Remarque

Il découle du théorème de Bolzano-Weierstrass que toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

2.3.2 Le $\limsup$ et le $\liminf$.

Soit (a_n) une suite réelle. On pose

$$\sup_n \ a_n := \sup\big\{a_n : n \geqslant 0\big\} \ \in \ \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \quad \text{et} \quad \inf_n \ a_n := \inf\big\{a_n : n \geqslant 0\big\} \ \in \ \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

On confond donc la suite (une fonction) avec l'ensemble de ces valeurs pour cette notation plus compacte. De la même façon, la notation $\sup\limits_{k\geqslant n} a_k$ signifie $\sup\{a_k \ , \ k \geqslant n\}$ et $\inf\limits_{k\geqslant n} u_k$ signifie $\inf\{a_k \ , \ k \geqslant n\}$.
On démontrera en exercice que $\sup_n(-a_n) = -\inf_n(a_n)$.

Définition 3.49

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **bornée**.

- On appelle ***limite inférieure*** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (noté $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$)

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \big(\sup_{k\geqslant n} u_k\big)$$

- On appelle ***limite supérieure*** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (noté $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$)

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \big(\inf_{k\geqslant n} u_k\big).$$

Cette définition semble bien technique, il convient donc de dépasser l'apparente difficulté : D'abord, observons que

$$b_n := \sup\{a_k \ , \ k \geqslant n\}$$

existe pour tout n dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Alors, soit la suite (a_n) est non-bornée, dans quel cas $b_n = +\infty$ pour tout n. Ou bien, (a_n) est bornée, et $b_n < \infty$ pour tout n. Mais dans ce cas, autre chose se passe : il est utile de voir que b_n décroît avec n, car l'ensemble

$$B_n = \{a_k \ , \ k \geqslant n\}$$

décroît avec n : on prend le sup sur moins en moins d'éléments. Ainsi, la suite (b_n) est décroissante, et elle est bornée, car (a_n) l'est : il suit qu'elle converge vers son infimum :

$$\lim_n b_n = \inf_n b_n,$$

ce qui veut dire que

$$\liminf a_n = \lim_n(\sup_{k\geqslant n} a_k) = \lim_n b_n = \inf_n b_n = \inf_n(\sup_{k\geqslant n} a_k).$$

On pourrait aussi parler du “infsup” au lieu de “limsup”, mais cela est moins commode (car le “supinf” correspond au “liminf”, et à la fin on n'arrive moins bien à s'orienter). Il existe une interprétation du $\liminf$ et $\limsup$ en termes des valeurs d'adhérence :

Propriété 3.50

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Alors $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration

Plan

1. Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux définis par
$$v_n = \sup\{u_k\ ,\ k \geqslant n\} \quad \text{et} \quad w_n = \inf\{u_k\ ,\ k \geqslant n\}$$
sont respectivement décroissante et croissante.
2. $\ell^+ = \lim_{n\to+\infty}\big(\sup_{k\geqslant n} u_k\big)$ et $\ell^- = \lim_{n\to+\infty}\big(\inf_{k\geqslant n} u_k\big)$ existent.
3. ℓ^+ majore l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ℓ^- minore l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. ℓ^+ et ℓ^- sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Détail

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, on note m un minorant et M un majorant. Pour tout entier n, on note $A_n = \{u_k\ ,\ k \geqslant n\}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M donc l'ensemble A_n est non vide et majoré, $v_n = \sup A_n$ est bien défini pour tout entier n. De même, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m, $w_n = \inf A_n$ est bien défini pour tout entier n. De plus
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \sup A_{n+1} \leqslant \sup A_n \text{ et } \inf A_n \leqslant \inf A_{n+1}.$$
Ce qui montre que suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. De $v_n = \sup A_n$ et $w_n = \inf A_n$ il découle de plus que pour tout entier n, $w_n \leqslant v_n$. Puis avec la croissance de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a que pour tout entier n, $w_0 \leqslant v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge et on note ℓ^+ la limite.
On montre de manière analogue que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0, elle converge et on note ℓ^- la limite.
3. Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il découle du fait que u_n est un élément A_n l'inégalité : $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$. Soit a une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par définition, il existe une suite extraite notée $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. La suite $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ^+, donc elle converge aussi vers ℓ^+. La suite $(w_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ^-, donc elle converge aussi vers ℓ^-.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant v_{\varphi(n)}$ et que chacune des suites converge on a $\lim_{n\to+\infty} w_{\varphi(n)} \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)}$ et donc $\ell^- \leqslant a \leqslant \ell^+$.
4. Montrons que ℓ^+ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (la démonstration est analogue pour ℓ^-). Pour cela on construit par récurrence une suite strictement croissante $\varphi(0), \varphi(1)\dots$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_{\varphi(n)} - \ell^+| \leqslant \frac{1}{n}$. On pose $\varphi(0) = 0$. Soit $n \geqslant 1$ et supposons que $\varphi(0), \varphi(1), \dots \varphi(n-1)$ construits. La suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers ℓ^+ donc il existe un entier $N > \varphi(n-1)$ tel que
$$\ell^+ \leqslant v_N \leqslant \ell^+ + \frac{1}{n}.$$
Avec la caractérisation de la borne supérieure, il existe alors un entier noté N' tel que $N' \geqslant N$ et $v_N - \frac{1}{n} < u_{N'} \leqslant v_N$. En posant $\varphi(n) = N'$, on a bien $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $\ell^+ - \frac{1}{n} \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant$

$\ell^+ + \frac{1}{n}$. Donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell^+$ et ℓ^+ est bien valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et c'est la plus grande avec le point précédent.

Propriété 3.51

Une suite (u_n) est convergente si, et seulement si

$$\liminf_n u_n = \limsup_n u_n.$$

Démonstration

En effet, une suite **convergente** a une unique valeur d'adhérence, et la conclusion se fait avec le résultat précédent. Réciproquement la démonstration ci-dessus montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell^+ = \ell^- = \lim_{n\to+\infty} w_n$.

Pour aller plus loin

On a le théorème suivant qui explique le lien entre plusieurs notions vues en cours.
Théorème Soit $\mathbb{K}$ est un corps ordonné, Archimédien, qui contient $\mathbb{Q}$, alors sont équivalents

1. Toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{K}$.
2. Toute suite croissante et bornée est convergente dans $\mathbb{K}$.
3. Une paire de suites adjacentes converge vers la même limite.
4. Toute partie non-vide et bornée admet un infimum et un supremum dans $\mathbb{K}$.

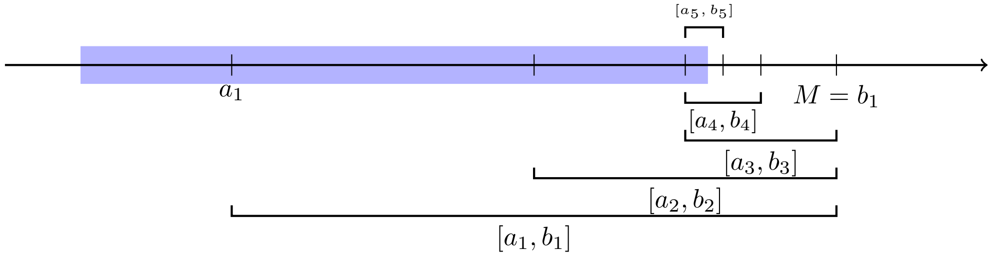
A partir de cette observation (preuve en bas), on peut soit "accepter" la propriété (2) ou (3) de façon axiomatique et en déduire (1), soit "construire" les nombres réelles pour satisfaire une (et donc toutes) de ces propriétés.
démonstration : Supposons que (a) soit satisfait, et (x_n) une suite croissante et bornée de $\mathbb{K}$. La preuve du théorème 2.31 montre que (x_n) est alors de Cauchy (car bornée), et par hypothèse de (a) elle est convergente. Ainsi (b) est vraie. Évidemment, si $(a_n), (b_n)$ sont adjacentes, alors (a_n) est croissante et bornée (par b_1), donc (c) suit. Supposons alors (c) et donnons-nous une partie non-vide, bornée A de $\mathbb{K}$. Cela veut dire qu'il existe un $M > 0$ avec $|a| \leqslant M$ pour tout $a \in A$. Quitte à agrandir M on peut même supposer $M \notin A$. On fixe un a_1 quelconque dans A, et on pose $b_1 = M$.

Pour tout $n \geqslant 1$ on définit itérativement trois suites, $(a_n), (b_n)$ et (x_n) : D'abord, on pose $x_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ (le milieu entre a_n et b_n). Ensuite on distingue deux cas :

$x_n \in A$: dans ce cas, on posera $a_{n+1} := x_n$ et $b_{n+1} := b_n$.

$x_n \notin A$: dans ce cas, on posera $a_{n+1} := a_n$ et $b_{n+1} := x_n$.

Voici la partie A en bleue, et la suite de premiers intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$



En tous cas, nous observons que $a_{n+1} \geqslant a_n$, que $b_{n+1} \leqslant b_n$ et que

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| \leqslant \tfrac{1}{2}|b_{n+1} - a_{n+1}|$$

Les suites $(a_n), (b_n)$ sont donc adjacentes, et convergent vers une commune limite ℓ. Une fois que $a_1 \in A$ et $b_1 = M \notin A$, cette propriété est donnée de père en fils : tous les $a_n \in A$, et tous les $b_n \notin A$. Il suit que chaque b_n est un majorant de A. Il en est de même pour ℓ : en effet, on trouverait dans le cas contraire un $a > \ell$ avec $a \in A$: mais par la propriété Archimédienne de $\mathbb{K}$ et le fait que (b_n) converge vers ℓ il existe un n avec $\ell < b_n < a$ ce qui est absurde. Symétriquement, aucun $x < \ell$ ne peut être un majorant de A : en effet $x < \ell$ implique par la convergence de (a_n) vers ℓ et la propriété Archimédienne de $\mathbb{K}$ l'existence d'un n avec $x < a_n < \ell$ ce qui montre que x n'est pas un majorant. Il suit que ℓ *est* le plus petit minorant de A. On a donc établi (d). Pour finir, supposons (d), et donnons nous une suite de Cauchy (u_n). Elle est bornée, et contient par Bolzano-Weierstraß une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})$, de limite ℓ. Mais de

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - u_{\varphi(m)}| + |u_{\varphi(m)} - \ell|$$

on voit facilement que (u_n) converge vers ℓ. En effet, soit $\varepsilon > 0$ donné. Par la convergence de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ on obtient l'existence d'un M tel que le deuxième terme devient plus petit que $\varepsilon/2$ dès que $m \geqslant M$. Or (u_n) est Cauchy, le premier terme devient plus petit que $\varepsilon/2$ pour tout $n, \varphi(m) \geqslant K$, donc a fortiori quand $n, m \geqslant K$. Il convient donc d'utiliser l'inégalité précédente pour $m = \max(K, M)$ pour déduire que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant K$!
$\square$

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Notions de fonction

3.1.1 Définitions

Rappelons la définition suivante du chapitre précédent.

Définition

Soient E et F deux ensembles. Une ***fonction*** de E dans F est une correspondance entre E et F telle qu'à tout élément x de E corresponde exactement un élément y de F. On note $f : E \to F$.
Pour rappeler que E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, on utilise souvent le terme de ***fonction numérique***. Dans ce cas on appelle $E = \mathcal{D}$ le ***domaine de définition*** de la fonction $f : E \to F$.
Soit E_0 une partie de E. La restriction de f à E_0, notée $f_{|E_0}$, est l'application $f|_{E_0} : E_0 \to F$ défini par $f|_{E_0}(x) = f(x)$.

Le ***graphe*** d'une application $f : E \to F$ est la partie G_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$G_f = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \in E\big\} = \big\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\big\}.$$

3.2 Limites de fonctions

La notion de continuité présente de mon expérience des difficultés d'apprentissage, notamment car l'idée scolaire («tracer le graphe sans lever la main») et sa formulation mathématique sont assez loin. Quelque part, l'étudiant(e) revit le développement historique entre 1820 et 1870 intérieurement. Que la formulation mathématique, malgré l'abstraction ne fut pas abandonné mais, bien au contraire, a été accepté comme une notion fondamentale est tout à fait remarquable et souligne son importance.

3.2.1 Limite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point.

Définition 2.1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en a***, noté

$$\lim_{x \to a, x \in I} f(x) \ = \ \ell,$$

si deux conditions sont satisfaites :

1. Il existe au moins une suite de I avec limite a
2. Pour *toute* suite (x_n) avec limite a, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; \ell.$$

On s'appuie donc confortablement sur la notion de limite d'une suite, déjà bien étudié.

Exemple 2.2

1. Soit $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ donné par $f(x) = x+1$. Alors la limite

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$$

existe. Car la suite $(1/n)$ appartient à $I = (0,\infty)$ et converge vers $a = 0$, *et* : pour toute suite (x_n) convergeant vers $a = 0$, $\lim_n x_n + 1 = 0 + 1 = 1$.

2. Soit $f(x) = \ln(x)$ défini sur $I = (0,\infty)$. Alors la limite

$$\lim_{x\to -1} f(x)$$

n'existe pas, parce que le premier point n'est pas satisfait : il est impossible d'approche $a = -1$ avec une suite de réels strictement positifs.

3. Soit $f(x) = x + \mathrm{signe}(x)$. Alors la limite

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x)$$

n'existe pas. En effet, avec $(1/n)$ nous avons une suite de $I = \mathbb{R}^*$ qui converge vers $a = 0$ (premier point), mais on observe que si $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors

$$f(x_n) = \begin{cases} x_n + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ x_n - 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et cette suite a deux valeurs d'adhérence, ± 1 – elle diverge donc.

3.2.2 Limite infinie, et limite à l'infini

La notion de «limite infinie» d'une suite réelle se traduit directement dans la notion de limite infinie d'une fonction : on dit que

$$\lim_{x\in I, x\to a} f(x) = +\infty$$

s'il existe (au moins) une suite dans I qui approche a, et si pour toute telle suite (x_n), on a $\lim f(x_n) = +\infty$, ce qui, rappelons le, veut dire :

$$\forall M > 0 : \quad \exists N \geqslant 0 : \quad \forall n \geqslant N : \qquad f(x_n) \geqslant M. \tag{$\star$}$$

avec une modification évidente pour $-\infty$. Une fonction f qui a une limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$ ne peut y être définie : le domaine de définition doit avoir un "trou" au point a. Il va de soi qu'une fonction définie sur $I\backslash\{a\}$ qui a une limite infinie en $x = a$ ne peut être prolongé par continuité sur I.

Il est parfois confortable de se débarrasser des suites pour une limite infinie, en observant que ($\star$) est équivalent à dire

$$\forall M > 0 : \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad \forall x \quad |x-a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geqslant M. \tag{$\star\star$}$$

En effet, ($\star\star$) clairement implique ($\star$) car toute suite (x_n) est “aspirée” dans le voisinage $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ à partir d'un certain rang. De l'autre coté, si ($\star\star$) est faux, il existe un $M > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$ il existe un x_n tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ bien que $f(x) < M$. Alors (x_n) converge vers a sans satisfaire ($\star$).

Appuyons nous sur ($\star\star$) pour définir une limite (finie) «à l'infini» : Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

1. $\lim\limits_{x \in \mathcal{D}_f, x \to +\infty} f(x) = \ell$ si, et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \geqslant K : \qquad x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. $\lim\limits_{x \in \mathcal{D}_f, x \to -\infty} f(x) = \ell$ si, et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \leqslant -K : \qquad x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

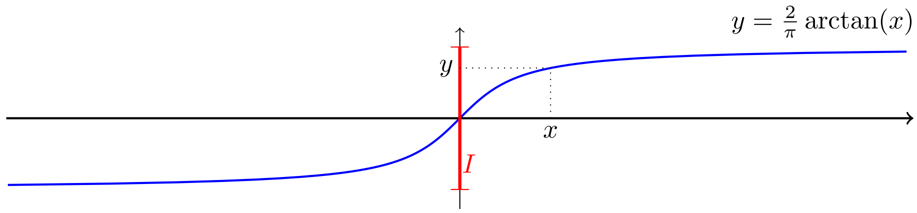
Finalement, on peut mélanger les deux approches et (par un léger abus de langage) définir
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$
si pour tout $M > 0$ il existe un $K > 0$ tel que $x > K$ (respectivement $x < -K$) implique $f(x) > M$ (respectivement $f(x) < -M$).

Propriété 2.3

Soit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe si, et seulement si $\lim_{t \to 0, t>0} f(\frac{1}{t})$ existe. Dans ce cas, les deux limites sont les mêmes.

Pour aller plus loin 2.4

La fonction $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$ est strictement croissante et continue, fournit donc (voir en bas) une bijection continue entre $\mathbb{R}$ et $(-1, 1)$. On peut l'étendre à $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ en posant $\varphi(+\infty) := +1$ et $\varphi(-\infty) := -1$. Ceci est donc une bijection (toujours appelé φ) entre $\overline{\mathbb{R}}$ et $I = [0, 1]$.



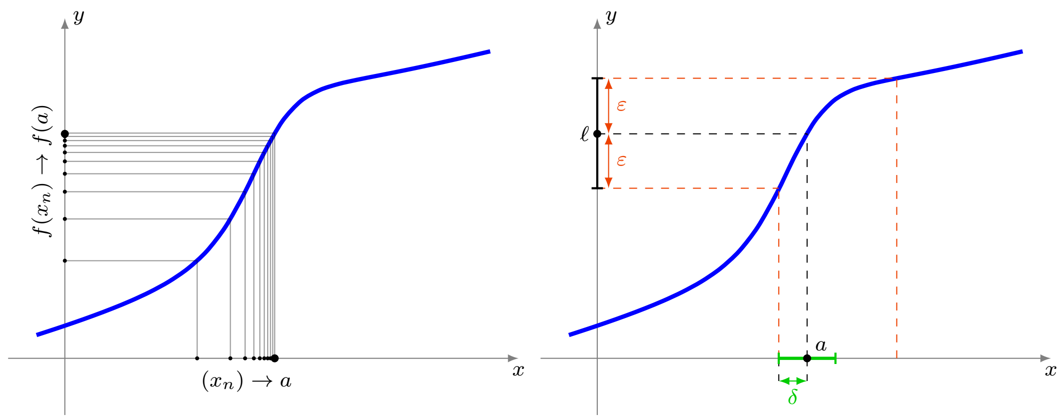
Le segment réel $(K, +\infty)$ correspond, via φ à un voisinage de la forme $(1 - \varepsilon, 1]$ du point $y = 1$, et le segment réel $(-\infty, K)$ correspond à $[-1, \varepsilon - 1)$. L'expression
$$\ldots \exists K > 0 \quad \forall x \geqslant K \ldots$$
qui apparaît dans la définition en haut est de ce point de vue une sorte de “voisinage de $+\infty$”, et l'existence d'une limite finie (à l'infini) de la fonction f est juste une limite “normale” de la fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(y) = f(\varphi^{-1}(y))$ au point $y = 1$.

3.3 Continuité

Définition 3.5. (Continuité en un point)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est appelé ***continu au point*** $x = a$, si

$$\lim_{x \to a, x \in I} f(x) \quad = \quad f(a)$$



Théorème 3.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ un point. Alors sont équivalents

1. f est continu en $x = a$
2. **(Caractérisation par suites)** pour toute suite (x_n) qui converge vers $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$
3. **(Caractérisation ε–δ)**
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$
Voir la figure ci-dessus.
4. **(Caractérisation par voisinages)** Une fonction f est continue en $x = a$, si pour tout voisinage V de $f(a)$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est une voisinage de a.

Rappelons la définition 2.16 : V est un voisinage de x s'il existe une $r > 0$ tel que $(x-r, x+r) \subseteq V$.

Remarque

- L'inégalité $|x-a| < \delta$ équivaut à $x \in (a-\delta, a+\delta)$. L'inégalité $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.
- On peut remplacer certaines inégalités strictes « $<$ »par des inégalités larges « $\leqslant$ » dans la définition : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration

Le point (2) est une reformulation de la définition (ici, la première condition est satisfaite gratuitement, car le domaine de définition est $\mathbb{R}$). De ce fait (1) $\iff$ (2) est tautologique.

Démontrons (2) $\implies$ (3) par contraposé : si (3) est faux, on a par négation formelle

$$\begin{array}{rl} \neg(& \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon \;) \\ \equiv & \exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad |x-a| < \delta \text{ mais } |f(x) - f(a)| > \varepsilon. \end{array}$$

On exploite le « $\forall\delta > 0$ » ici : pour le choix $\delta = {}^1\!/_n$, il existe un x_n tel que $|x_n - a| < {}^1\!/_n$ tandis que la distance de $f(x_n)$ à $f(a)$ est supérieure à ε. Autrement dit : (x_n) converge vers a, mais $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

Démontrons (3) $\implies$ (4). Soit V un voisinage de $f(a)$. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq V$. Il suit que

$$f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}((f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon))$$

Par (3), il existe pour cet $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ avec la propriété que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Mais ceci veut justement dire que

$$\{x \in \mathbb{R} : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon\} \supseteq (a - \delta, a + \delta)$$

Il suffit de combiner ces deux inclusion pour conclure :

$$f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}((f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)) = \{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon\} \supseteq (a-\delta, a+\delta)$$

ce qui montre que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.

Pour clore la boucle (4) $\implies$ (2), soit (x_n) une suite qui converge vers a, et V un voisinage de $f(a)$. Puisque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a, il contient tous les x_n à partir d'un certain rang N, donc

$$\forall n \geqslant N : \quad x_n \in f^{-1}(V) \qquad \iff \qquad \forall n \geqslant N : \quad f(x_n) \in V,$$

ce qui signifie qu'un voisinage (quelconque) V de $f(a)$ contient tous les $f(x_n)$ à partir d'un certain rang : autrement dit, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. $\square$

Pour aller plus loin

Reprenez la formulation métrique rencontré plus tôt, et observez que les formulations se transposent *in verbatim* dans le cadre d'un espace métrique (X, d), lorsqu'on remplace $|x - y|$ par $d(x, y)$.

3.3.1 Les ouverts et les fermés

Définition 3.7. (Intervalles et ensembles ouverts et fermés)

Un intervalle de le forme $I = (a, b)$ est appelé un intervalle ouvert, et un intervalle de la forme $[a, b]$ est appelé fermé.
Plus généralement, on appelle une partie F de $\mathbb{R}$ fermée, si pour toute suite convergente (x_n) qui satisfait $x_n \in F$ pour tout n on a automatiquement que $x = \lim x_n \in F$. Un ensemble est donc fermé si on ne peut pas lui échapper par «prise de limites».
Une partie O de $\mathbb{R}$ est appelé ouverte si son **complémentaire** $F = \mathbb{R} \backslash O$ est fermé. Par double complémentaire, une partie est fermée, si et seulement son complémentaire est ouverte.

Remarque

Vérifions d'abord que les intervalles ouverts (resp. fermés) sont des ensembles ouverts (resp. fermés) dans le sens de la définition : Soit (x_n) une suite convergente, telle que $x_n \in [a, b]$ pour tout n. Mais alors, $a \leqslant x_n \leqslant b$ ce qui implique par la Proposition 2.21 que $a \leqslant x \leqslant b$. Par passage au complémentaire, tout intervalle ouvert est un ensemble ouvert.
Le vocabulaire ouvert /fermé est donc cohérent.

Exemple 3.8

L'ensemble $F = [1, 2] \cup [3, 4]$ est un fermé mais pas un intervalle fermé.

L'ensemble $F = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$ est fermé. Il s'agit des points de la suite (x_n) défini par $x_n = 1/n$ ainsi que de leur limite. Toute suite de F sera une sous-suite de (x_n) et converge donc vers 0.

L'intervalle $I = [0, 1)$ n'est pas fermé, car $x_n = \frac{n-1}{n}$ lui appartient, mais la limite 1 pas. Cela ne veut pas pour autant dire que I serait ouvert ! Ce serait une confusion fréquente, à éviter.

Nous avons la caractérisation suivante des ouverts :

Théorème 3.9

Une partie O de $\mathbb{R}$ est ouverte si et seulement si pour tout $x \in O$ il existe un $r > 0$ tel que $(x-r, x+r) \subseteq O$.
Autrement dit : un ouvert est voisinage de tous de ces points.
Encore autrement dit : la distance $d(x, O^\complement) := \inf_{z \notin O} |x - z|$ est strictement positive pour tout $x \in O$.

Démonstration

On démontre $\Rightarrow$ par contraposé : s'il existe un point $x \in O$ tel que aucun intervalle $(x-r, x+r)$ ne soit inclus dans O, il existe pour tout n un $x_n \notin O$ avec $|x_n - x| < 1/n$. Cette suite, qui appartient à $O^\complement$ converge donc vers x. Vu que sa limite x appartient à O, le complémentaire n'est pas fermé, O donc pas ouvert.
Pour $\Leftarrow$ on suppose que O est ouvert, donc que $O^\complement$ est fermé. Pour tout $x \in O$ fixé, il suit qu'on ne peut donc pas l'approcher avec une suite appartenante à $O^\complement$ (car sinon x serait dans $O^\complement$). Ceci implique l'existence du $r > 0$ comme demandé : en effet, comme déjà vu en haut, si aucun intervalle $(x-r, x+r)$ autour de x n'était inclus dans O, on pourrait approcher avec une suite venant du complémentaire $O^\complement$, ce qui est faux. Alors un tel $r > 0$ doit exister.

3.3.2 Continuité 'globale'

Définition 3.10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue, si f est continue en tout point $a \in I$.

Exemple 3.11

1. Toute fonction constante est continue (exercice), la fonction $f(x) = x$ aussi (exercice).
2. La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, on a l'inégalité triangulaire inférieure

$$||x| - |a|| \leqslant |x - a|$$

de laquelle on obtient que $\delta := \varepsilon$ fonctionne en tout point a. Pour rappel : l'inégalité elle-même s'obtient par $|x| = |x - a + a| \leqslant |x - a| + |a|$ d'où $|x| - |a| \leqslant |x - a|$. Ensuite on inverse les rôles de x, a et conclut.

3. Toute fonction monomiale $f(x) = x^n$, avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est continue. Exercice : démontrez d'abord
$$X^n - Y^n = (X - Y) \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k} Y^k$$
Ensuite, si $|x - a| \leqslant 1$, on a
$$|f(x) - f(a)| \ \leqslant \ L|x - a| \qquad o \qquad L = \sum_{k=0}^{n-1} (|a| + 1)^{n-1-k} |a|^k.$$
Conclure à partir d'ici en exercice.

4. La fonction racine $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $I = [0, \infty)$ est continue. En effet, soit d'abord $a = 0$. Or, $f(a) = 0$, on a
$$|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$$
pourvu que $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^2$. Reste le cas où $a > 0$ et $x \geqslant 0$.
$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$
On observe que
$$|x - a| = \begin{cases} x - a \leqslant x & \text{si } x \geqslant a \\ a - x \leqslant a & \text{si } x \leqslant a \end{cases}$$
ce qui entraîne $|x - a| \leqslant \max(x, a)$, et donc $\sqrt{|x - a|} \leqslant \max(\sqrt{x}, \sqrt{a})$. En reprenant les idées dessus, il suit que
$$|f(x) - f(a)| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leqslant \sqrt{|x - a|}$$
ce qui prouve que dans la version ε–δ on peut choisir $\delta = \varepsilon^2$.

Le lien entre ces notions et les fonctions continues sont les suivantes.

Théorème 3.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors sont équivalents :

1. f est continue.
2. Pour tout $a \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
3. L'image réciproque de tout fermé sous f est un fermé.
4. L'image réciproque de tout ouvert sous f est un ouvert.

Démonstration

L'équivalence (1) $\Longleftrightarrow$ (2) provient de la caractérisation ε–δ du théorème 3.6.
(2) $\Rightarrow$ (3) : soit A un fermé de $\mathbb{R}$ et (x_n) une suite dans $f^{-1}(A)$. On suppose que (x_n) converge vers x, et doit montrer que $x \in f^{-1}(A)$. Par continuité de f nous savons que $f(x_n)$ converge vers $f(x)$, et par définition de l'image réciproque nous savons que $f(x_n) \in A$ pour tout n. Or A est fermé, $f(x) \in A$ ou bien $x \in f^{-1}(A)$. Il suite que $f^{-1}(A)$ est un fermé.
(3) $\Rightarrow$ (4) : Soit O un ouvert. Par définition, $A = O^{\complement}$ est donc fermé, ce qui implique par (3) que $f^{-1}(A) = f^{-1}(O^{\complement}) = f^{-1}(O)^{\complement}$ est un fermé. Alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Soit $a \in \mathbb{R}$ un point quelconque. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle ouvert $I = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$

est un ouvert, il suit par (4) que son pré-image $f^{-1}(I)$ est un ouvert. Mais alors, par le théorème 3.9, il contient un petit intervalle autour de chacun de ces points. Or, $a \in f^{-1}(I)$, il existe donc un $\delta > 0$ tel que $(a-\delta, a+\delta) \subseteq f^{-1}(I)$. Ceci signifie que $|x-a| < \delta$ qui est équivalent à $x \in (a-\delta, a+\delta)$ implique $x \in f^{-1}(I)$ ou bien $f(x) \in I$ ce qui est équivalent à $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. □

3.3.3 Opérations sur des fonctions continues

La restriction conserve la continuité. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, et $J \subset I$. Alors la restriction de f à J, c'est à dire la fonction

$$f|_J : \begin{cases} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

est continue également. Cela suit directement du fait que continuité signifie «continuité en tout point». Et pour $f|_J$ il y a moins de points à vérifier ...

Propriété 3.13. (Composition)

1. (version ponctuelle) Soient I, J des intervalles et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $a \in I$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
2. (version globale) Soit $f : I \to J$ continue et $g : J \to \mathbb{R}$ aussi. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration

La version globale découle de la version point-par-point, qui, elle, découle de l'observation que $x_n \to x$ implique $f(x_n) \to f(x)$ par continuité de f ce qui implique $g(f(x_n)) \to g(f(x))$ par la continuité de g.

Pour aller plus loin: Exercice

Soit I, J des intervalles et $J \subset I$. Montrer que l'inclusion $i : J \to I$, $i(x) = x$ est une fonction continue. Quel est le lien avec la restriction d'une fonction continue définie sur I sur J ?

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété 'locale' - c'est à dire : «dans une voisinage»). Voici l'énoncé :

Propriété 3.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I : \qquad |x-a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \neq 0.$$

Démonstration

Supposons que $f(a) > 0$, le cas $f(a) < 0$ se montrerait de la même manière. Avec la définition de la continuité de f en a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x-a| < \delta \implies f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ on a $0 < \varepsilon < f(a)$. Il suit pour tout $x \in I$ avec $|x-a| < \delta$ que $f(x) > f(a) - \varepsilon > 0$.

De la propriété précédente est des opérations sur le limites de suites réelles découle immédiatement

Propriété 3.15

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$. Alors
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda \cdot f$ est continue en a,
- $f + g$ est continue en a,
- $f \cdot g$ est continue en a,
- si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Cette version "ponctuelle" a évidemment une version "globale", à savoir : les multiples scalaires (1), sommes (2), produits (3) de fonctions continues sont continues. Si $g(a) \neq 0$ en tout point a, alors les quotients (4) de fonctions continues sont continues.

Pour aller plus loin

La propriété précédente montre que $V = \{f : I \to \mathbb{R}, \quad f \text{ continue } \}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : il forme un groupe additif avec la fonction nulle comme élément neutre, et il est stable multiplication scalaire. On note cet espace habituellement par $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$.

Exemple 3.16

Les quelques propriétés sur les opérations ci-dessus peuvent être mélangés, ce qui développe une belle "complexité". Par exemple, les propriétés (1) et (2) avec l'exemple ci-dessus des fonction monomiales impliquent que tout polynôme définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Il suit alors que la fonction

$$f(x) = \sqrt{|x^3 - 3x + 1| + |5 - x^2|}$$

est continue : la composition de la valeur absolue avec deux polynômes montre la continuité de $g(x) = |x^3 - 3x + 1|$ et $h(x) = |5 - x^2|$, donc de leur somme, qui, elle, est à nouveau composée avec la racine carrée.

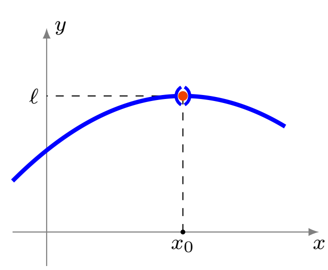
3.3.4 Prolongement par continuité

Définition 3.17

Soient I un intervalle, a un point de I et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
- On dit que f est ***prolongeable par continuité*** en a si f admet une limite finie en a. Notons alors $\ell = \lim_{a} f$.
- On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en a et on l'appelle le ***prolongement par continuité*** de f en a.



Exemple 3.18

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Elle est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction s'appelle le *sinus cardinal*.

3.3.5 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.19. (des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration

Montrons le théorème dans le cas où $f(a) < f(b)$. On considère alors un réel y tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ et on veut montrer qu'il a un antécédent par f.

Plan

1. On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et une suite $(b_n)_n$ telles que pour tout n, $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$.
2. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers $c \in [a,b]$.
3. Les suites $(f(a_n))_n$ et $(f(b_n))_n$ convergent vers $f(c)$.
4. $f(c) = y$.

Détail

1. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On travaille par dichotomie et on va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$\exists a_{n+1},\ \exists b_{n+1}\ :\ a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \text{ et } b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \text{ et } f(a_{n+1}) \leqslant y \leqslant f(b_{n+1}).$$

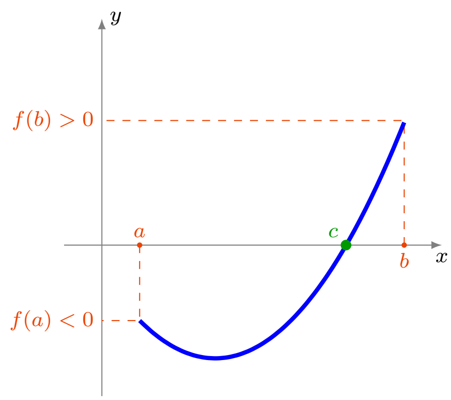
   Initialisation : Si $f(\frac{a+b}{2}) \geqslant y$ on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$, sinon on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b_0$. La proposition est vraie pour $n = 0$.
   Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ supposons la proposition vraie au rang $n-1$. Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geqslant y$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. On a par construction $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $f(a_{n+1}) \leqslant y \leqslant f(b_{n+1})$. De plus $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$. La proposition est vraie au rang n.
   Conclusion : elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il découle de la proposition que la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante et $\lim_n (b_n - a_n) = 0$. Les deux suites sont adjacentes.
2. Les deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite c. $c \in [a,b]$ est une conséquence de l'inégalité : pour tout entier n, $a \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b$.
3. f est continue sur $[a,b]$ donc en $c \in [a,b]$. (a_n) et (b_n) sont deux suites de $[a,b]$ qui convergent vers c.
4. Pour tout entier n, $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$, avec le point précédent et les inégalités sur les limites, $f(c) \leqslant y \leqslant f(c)$. Soit $f(c) = y$.

Pour aller plus loin

La preuve du théorème, peu importe comme on l'attaque, repose sur la complétude de $\mathbb{R}$. En regardant la fonction $f(x) = x^2 - 2$, montrer que le théorème devient faux, si on remplace partout «réel» par «rationnel».

Corollaire 3.20

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Si f change de signe entre a et b, en formules, si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Rappelons que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ équivaut à

$$\forall \alpha \in I \text{ et } \forall \beta \in I \quad \text{si} \quad \alpha \leqslant \beta \quad \text{alors} \quad [\alpha, \beta] \subset I$$

autrement dit, il ne peut pas y avoir de "trou" entre deux éléments de l'intervalle. Le théorème des valeurs intermédiaires peut alors se reformuler de la façon suivante

Corollaire 3.21

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

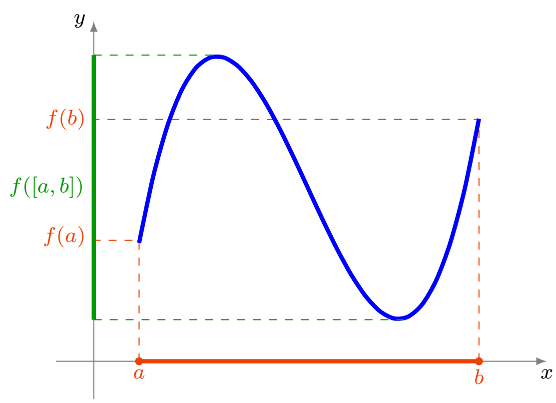
Soit $c = \inf\{f(x) : x \in I\}$ et $d = \sup\{f(x) : x \in I\}$. Alors $f(I) \subseteq [c, d]$. De l'autre coté toute valeur ξ strictement incluse entre le sup et le inf et atteinte : car $c < \xi < d$ implique qu'il existe $a < b$ dans I avec

$$c < f(a) < \xi < f(b) < d$$

(Exercice : justifier cette affirmation dans le plus grand détail !). Le théorème assure alors que ξ est une valeur atteinte par f. Il suit que $(c, d) \subseteq f(I) \subseteq [c, d]$, et donc

$$f(I) \in \{\ [c, d],\ (c, d],\ [c, d),\ (c, d)\ \}\,.$$

Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$.



3.3.6 Fonctions continues sur un segment

Théorème 3.22. (du maximum et minimum)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes. C'est-à-dire, il existe deux réels m et M tels que

$$m = \min\{f(x)\ ,\ x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad M = \max\{f(x)\ ,\ x \in [a, b]\}.$$

Démonstration

Plan : Le preuve se fait en deux parties : d'abord on établit que f est bornée, puis on montre que le sup / inf est atteint. Les deux parties (!) reposent sur le théorème de Bolzano-Weierstraß, et donc sur la complétude de $\mathbb{R}$.
Détail : On montre que si $|f|$ n'est pas majorée alors $|f|$ est discontinue. En effet, supposons donc qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de $[a, b]$ tels que $|f(x_n)|$ tend vers $+\infty$. La suite $(x_n)_n$ est une suite de $[a, b]$ donc une suite bornée : d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un élément $c \in [a, b]$, tandis que $f(x_n) \to +\infty \neq f(c)$. Il suit que $|f|$ est discontinue. On a donc établi «non-bornée implique discontinue», ou, par contraposée, «continue implique bornée». Évidemment, $|f|$ est continue, comme composition des fonctions $x \to |x|$ et f. Il suit que f est bornée.

L'ensemble des valeurs $V := \{f(x) : x \in [a,b]\}$ est alors bornée, soit

$$M = \sup(V) \quad \text{et} \quad m = \inf(V)$$

par définition de la borne supérieure, il existe une suite d'éléments de $f([a,b])$ qui converge vers M : en effet, $M - 1/n$ n'est pas une borne supérieure, il existe donc x_n avec

$$M - \tfrac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M$$

Avec le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une sous suite $(x_{\psi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ convergeant vers un élément $d \in [a,b]$. Alors on a d'une part,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\psi(n)}) = f(d)$$

car f est continue . D'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\psi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M.$$

D'où $f(d) = M$. Le cas de la borne inférieure m se traite de la même manière.

Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a,b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que :

Théorème 3.23

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

3.3.7 Continuité uniforme et théorème de Heine

Si $A \subset \mathbb{R}$ et f est une fonction de A dans $\mathbb{R}$, dire que f est continue sur A équivaut à dire que f est continue en tout point de A. Cela s'exprime (rappel) par

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \eta(a,\varepsilon) > 0,\ \text{tel que } \big(x \in A \text{ et } |x-a| < \eta\big) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dans cette définition, il faut noter que le $\eta > 0$ ci–dessus dépend de ε bien sûr, mais aussi de a. Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 3.24

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est ***uniformément continue sur A*** lorsque f satisfait

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall\, x,y \in A,\ \big(|x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Remarque

Une fonction uniformément continue est évidemment continue. La définition de la continuité uniforme peut paraître opaque à la première lecture. Notons, à future référence, que le mot «uniforme» voudra toujours dire : «ne dépend pas de x». Ensuite, essayons pour motivation d'attaquer la question suivante : soit (x_n) une suite de Cauchy, et f continue. Est-il vrai que $(f(x_n))_n$ est Cauchy ? Par exemple, si $f(x) = 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x_n = 1/n$. Cette suite est Cauchy (sans converger dans $(0,\infty)$!), mais la suite image $f(x_n) = n$ ne l'est pas (car non-bornée). Qu'est-ce qui s'est passé ? Si on veut que f envoie des suites de Cauchy sur des suites de Cauchy, il faut pouvoir déduire de «x_n proche de x_m, peu importe leur localisation» que «$f(x_n)$ est proche de $f(x_m)$». C'est précisément la raison d'avoir construit la notion de continuité uniforme.

Pour aller plus loin

Soit I un intervalle. Une partie D de I est dense si pour tout $x \in I$ il existe une suite (d_n) de D qui converge vers x.

Théorème : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est uniformément continue si, et seulement si, f admet une extension continue sur I.

On va pas démontrer ce résultat, mais il illustre l'utilité. Par exemple, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On considère $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ est continue sur $\mathbb{Q}$! Mais pas uniformément continue, car sinon la même formule donnerait une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.25

Les fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ sont uniformément continues :

$$\exists K > 0, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

On peut calculer $\delta := \varepsilon/L$ indépendamment de la position de x, y.

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, +\infty)$. On l'a déjà vu en haut.

Théorème 3.26. (de Heine)

Toute fonction $f \ : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

Démonstration

On fait une preuve par contraposé : on va montrer que «non-uniformité de la continuité» implique discontinuité.

Plan

1. En traduisant f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$, construction de deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$ telles que pour tout entier n, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
2. En appliquant 2 fois le théorème de Bolzano-Weierstrass, on a deux sous-suites convergeant vers un même réel $c \in [a,b]$.

Détails.

1. La négation de « f uniformément continue sur $[a,b]$ » s'écrit :
$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0,\ \exists\, x, y \in [a,b] \text{ tels que } \big(|x-y| < \delta\big) \text{ tandisque } \big(|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon\big).$$
On exploite le $\forall \delta > 0$ ici : en prenant $\delta = \frac{1}{n+1}$, on a l'existence des suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$ telles que pour tout entier n, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
2. (x_n) est une suite bornée donc il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $c \in [a,b]$. Or, $(y_{\varphi(n)})_n$ est une suite bornée donc il existe une suite extraite $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ qui converge vers $d \in [a,b]$. Écrivons $\eta(n) = \varphi(\psi(n))$. Le point est que $(x_{\eta(n)})_n$ est une suite extraite d'une suite convergente donc elle converge vers la même limite $c \in [a,b]$: c'est à dire : on a simultanément (pour la même sous-suite η !)
$$x_{\eta(n)} \to c \qquad \text{et} \qquad y_{\eta(n)} \to d$$
Pour tout entier n, $|x_{\eta(n)} - y_{\eta(n)}| < \frac{1}{\eta(n)+1}$ puis en faisant tendre n vers $+\infty$ on a $|c-d| \leqslant 0$ soit $c = d$.

3. On a donc 2 suites convergeant vers le point $x = c = d$ mais les suites images satisfont $|f(x_{\eta(n)}) - f(y_{\eta(n)})| \geqslant \varepsilon$ ce qui implique que f ne peut pas admettre une (unique !) limite en $x = c$. Pas de limite en $x = c$, pas de continuité de f. □

3.4 Fonctions monotones et bijections

3.4.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Définition 4.27

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.
- f est ***injective*** si : $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;
- f est ***surjective*** si : $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$;
- f est ***bijective*** si : f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, il existe un ***unique*** $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Exercice 4.28

En algèbre linéaire on note parfois qu'une application linéaire A entre deux espaces vectoriels est injective si $Ax = 0$ implique $x = 0$. Expliquer le lien avec «notre» définition (qui est plus générale !).

Propriété 4.29

Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ La fonction g est la ***bijection réciproque*** de f et se note f^{-1}.

Remarque

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On a alors une malheureuse notation de f^{-1} pour la fonction inverse de f d'un coté et de «l'image réciproque»

$$A = f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

où $A \subset X$ et $B \subseteq Y$ sont donc des parties. L'image réciproque est $t$oujours défini, même si f n'est pas injectif (et que donc, f^{-1} n'existe pas en tant que fonction). Il convient donc, quand on lit «f^{-1}» de déduire la bonne signification du contexte.

Remarque

- On rappelle que l'***identité***, $\mathrm{id}_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$.
- $g \circ f = \mathrm{id}_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x$.
- Alors que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ s'écrit : $\forall y \in F \quad f\big(g(y)\big) = y$.
- Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3.4.2 Fonctions monotones et bijections

Voici un résultat important qui permet d'obtenir des fonctions bijectives.

Théorème 4.30. Théorème de la bijection

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

Démonstration

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que f est strictement croissante sur I, le cas strictement décroissant se traite de la même façon.

Plan

1. f injective sur I découle de f strictement monotone sur I. En prenant $J = f(I)$ on a par construction f surjective. Donc f bijective de I sur $J = f(I)$ qui est aussi un intervalle par continuité de f.
2. f^{-1} a le même sens de variation que f.
3. f^{-1} continue sur J.

Détail du dernier point

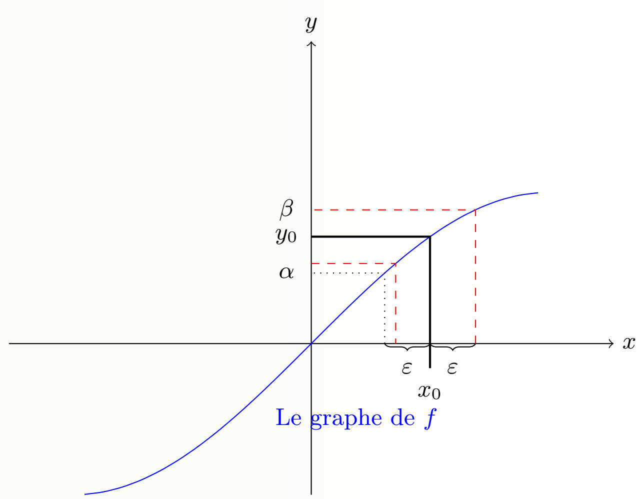
On se limite au cas où I est de la forme $]a, b[$, les autres cas se montrent de la même manière.
Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ et on cherche un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in J \quad |y_0 - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Or, $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ il existe un (unique) $\alpha, \beta \in J = f(I)$ tel que $f(\alpha) = x_0 - \varepsilon$ et $f(\beta) = x_0 + \varepsilon$. Lorsqu'on exige $|y - y_0| < r$ avec $r = \min(|\alpha - y_0|, |\beta - y_0|)$, voir les lignes rouges sur le dessin à droite, on sait que $y \in (\alpha, \beta)$, ce qui implique $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Cette inclusion équivaut

$$|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon,$$

comme demandé. On a donc, pour un $\varepsilon > 0$ donné, construit le $\delta > 0$ correspondant assez explicitement.



Exercice 4.31

Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que la fonction f est nécessairement strictement monotone sur I. Un joli exemple de ce type est la fonction $f(x) = x + \sin(x)$.

Indication : on peut (p.ex.) supposer $f(a) < f(b)$ du fait que f est injective. Si f n'était pas strictement croissante, on avait $a < c < d < b$ avec $f(c) \geqslant f(d)$. (Faire un dessin). Le cas «=» est exclu par injectivité de f, on aurait donc $f(c) > f(d)$. Mais alors le théorème des valeurs intermédiaires contredit l'injectivité facilement, il suffit de regarder le dessin.

3.5 Dérivée

La notion de dérivée arrive dans notre exposition relativement tard, ce qui est curieux, si l'on se rappelle qu'elle marque le début de l'histoire de l'analyse. Vers 1670 Isaac Newton publia «calculus of fluents and fluxions» dans lequel in considère des quantités qui dépendent continûment du temps, les «fluents» et leur taux de variation, les «fluxions». Cette notion est floue, ce qui n'empêcha pas de s'en servir et de résoudre des problèmes mathématiques et physiques. En même temps, Gottfried Wilhelm Leibniz trouva (indépendamment de Newton) une version du même calcul, qui utilisa la notion de «différentielles», produites par des variations «infinitissimales», des "quantités arbitrairement petites". La version de Leibniz avait un avantage de présentation et de notation et devint la norme, inchangé depuis : La notation $\frac{dy}{dx}$ est donc d'origine de Leibniz, et désigne le quotient du changement dy de y par rapport au changement dx de x. La pensée des "quantités arbitrairement petites" de Leibniz a été transformé dans la notion de limite au cours des 150 années suivantes, ce qui donna finalement naissance au calcul différentiel moderne.

3.5.1 Dérivée en un point

Définition 5.32

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$. On dit que f est ***dérivable en*** a si le ***taux d'accroissement*** (ou quotient différentiel)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en a et est noté $f'(a)$. Ainsi

$$f'(a) = \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Définition 5.33

f est ***dérivable sur*** I si f est dérivable en tout point $a \in I$. La fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ défini par $f' : x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 5.34

1. (La fonction constante). Si $f(x) = c$ pour tout x, alors le quotient différentiel $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est constant à zéro pour tout $x \neq a$. Il suit que f' est la fonction nulle.
2. (Une fonction linéaire). Soit $f(x) = c\,x$. Alors $f(x) - f(a) = c.(x - a)$, et le quotient différentiel $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est constant à c pour tout $x \neq a$. Il suit que f' est la fonction $f'(x) = c$.

3. (Puissances) Soit $n \geqslant 1$. On utilise la formule

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

pour justifier que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} \quad \to \quad na^{n-1}$$

lorsque $x \to a$. Il suit $f'(x) = nx^{n-1}$.

4. (Inversion) Sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{a-x}{ax(x-a)} = \frac{-1}{ax} \quad \to \quad \frac{-1}{a^2}$$

lorsque $x \to a$. Il suit $f'(x) = -x^{-2}$.

5. (Racine) On a la fonction racine $f(x) = \sqrt{x}$ sur $(0,\infty)$. Vu que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \quad \to \quad \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

quand $x \to a$, on déduit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :

$$(*) \qquad \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}.$$

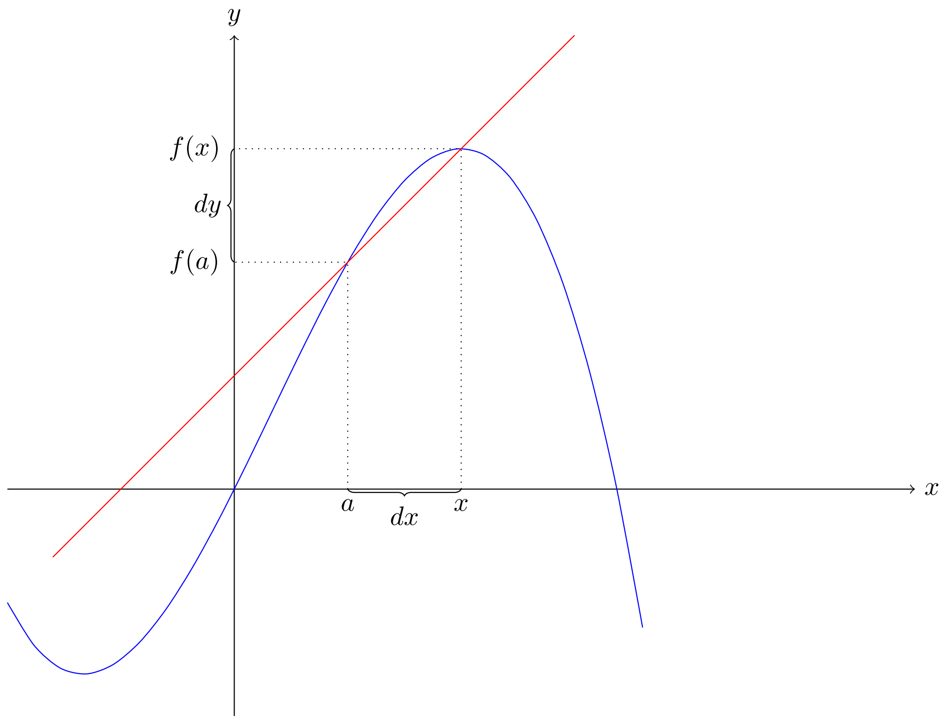
Remarquons déjà que la première assertion prouve que lorsque $x \to 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \to 1$ et donc f est dérivable en $a=0$ et $f'(0)=1$. Pour a quelconque on écrit :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}.$$

Lorsque $x \to a$ alors d'une part, par continuité de la fonction cos, $\cos\frac{x+a}{2} \to \cos a$ et d'autre part en posant $u = \frac{x-a}{2}$ alors $u \to 0$ et on a $\frac{\sin u}{u} \to 1$. Ainsi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \cos a$ et donc $f'(x) = \cos x$.

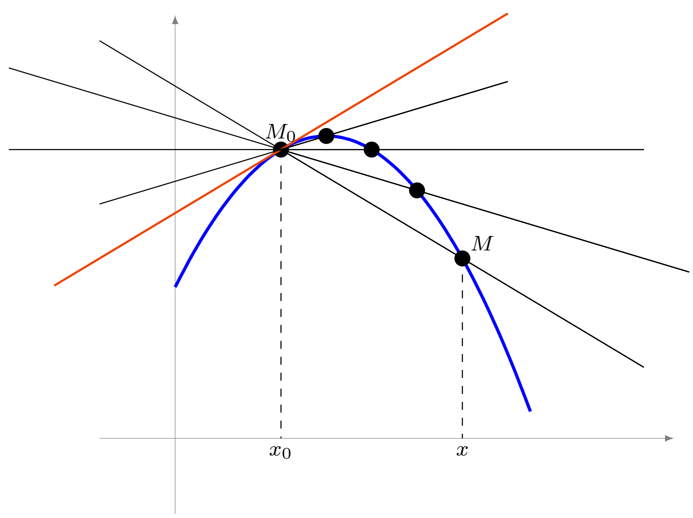
(*) : Pour une justification voir le polycopié d'exercices du semestre 1 «Mathématiques générales» . Une preuve rigoureuse sera donnée en S3 : elle nécessite de définir analytiquement les fonctions trigonométriques par une série.

3.5.2 Interprétation géométrique



Le quotient différentiel $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{dy}{dx}$ met en relation l'incrément des valeurs de la fonction f (le dy) quand on passe avec son argument de a à x (le dx). Sa valeur est donc la «pente» de la sécante à la courbe du graphe de f, passant par les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$, le coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points. Si f est dérivable en a, à la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$. Une équation de la ***tangente*** au point $(a, f(a))$ est donc :

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$



On voit l'évolution des sécantes, lorsque x s'approche à a. Voici deux autres formulations de la dérivabilité de f en a.

Propriété 5.35

1. f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
2. f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(a)$) et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ avec
$$f(x) = f(a) + (x-a)\ell + (x-a)\varepsilon(x).$$

Démonstration

A faire.

Propriété 5.36

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration

A faire en exercice.

3.6 Calcul des dérivées

3.6.1 Somme, produit,...

Propriété 6.37

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. En cas de quotients, on supposera le dénominateur non nul. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll}
\text{(Sommes)} & (f+g)' = f' + g' \\
\text{(Multiples)} & (\lambda f)' = \lambda f' \\
\text{(Produits)} & (f \times g)' = f'g + fg' \\
\text{(Inversion)} & \left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2} \qquad (f \neq 0) \\
\text{(Quotients)} & \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (g \neq 0).
\end{array}$$

Remarque

On observe que dans $(f{+}g) := f(x){+}g(x)$ les deux "plus" ne ont pas les mêmes : En effet, $+$ est la somme de deux fonctions, définie par la somme dans $\mathbb{R}$ via le $+$ du coté droit. Ainsi, la première ligne est une écriture confortable pour

$$\forall x \in I : \qquad (f{+}g)'(x) = f'(x){+}g'(x).$$

Les autres lignes sont à lire de la même façon.

Démonstration

Fixons $a \in I$. L'identité

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

implique la première, et la deuxième est évidente. Quant aux produits,

$$\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a) \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)g(a)+g'(a)f(a).$$

Cela étant vrai pour tout $a \in I$ la fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'g+fg'$.

L'inversion se traite comme dans l'exemple de $1/x$ (exercice), puis le quotient est un produit de f avec $1/g$!

3.6.2 Composition

Propriété 6.38

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a de dérivée et

$$\big(g \circ f\big)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a).$$

Démonstration

On a envie d'écrire

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et de laisser x tendre vers a : le problème de cette approche consiste dans le fait que le dénominateur $(f(x)-f(a))$ pourrait s'annuler. Alors on passe par la caractérisation de «l'approximation linéaire», Prop. 5.35 à la place : on a

$$f(x)-f(a) \;=\; f'(a)(x-a)+\varepsilon_f(x)(x-a), \qquad \lim_{x\to a}\varepsilon_f(x)=0$$

et avec $b=f(a)$, on aussi

$$g(y)-g(b) = g'(b)(y-b)+\varepsilon_g(y)(y-b), \qquad \lim_{y\to b}\varepsilon_g(y)=0.$$

si on pose $y=f(x)$ on obtient

$$\begin{aligned} g(f(x))-g(f(a)) &= g'(f(a))(f(x)-f(a))+\varepsilon_g(f(x))(f(x)-f(a)) \\ &= g'(f(a))(x-a)(f'(a)+\varepsilon_f(x))+\varepsilon_g(f(x))(x-a)(f'(a)+\varepsilon_f(x)) \\ &= \underbrace{g'(f(a))f'(a)}_{=\text{cst.}}\,(x-a)+(x-a)\underbrace{g'(f(a))\varepsilon_f(x)+\varepsilon_g(f(x))(f'(a)+\varepsilon_f(x))}_{=\varepsilon(x)} \end{aligned}$$

On observe que $g(f(x))-g(f(a))$ est de la même structure de Prop. 5.35. Reste la question du comportement du reste $\varepsilon(x)$: quand $x\to a$, aussi $f(x)\to f(a)=b$ car f est continue (toute fonction dérivable est continue !). Alors à la fois $\varepsilon_f(x)\to 0$ et $\varepsilon_g(f(x))\to 0$, ce qui entraîne $\varepsilon(x)\to 0$. Il suit que

$$g(f(x)) = g(f(a))+g'(f(a)).f'(a)\,(x-a)+\varepsilon(x)(x-a), \qquad \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0,$$

ce qui prouve la propriété.

Propriété 6.39

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to J$ continue et bijective de I sur J. Si de plus f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Démonstration

Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Rappelons d'abord que puisque f est continue et bijective sur I intervalle, alors f est strictement monotone sur I. On sait alors grâce au théorème 4.30 (théorème de la bijection) que g est continue sur J.

Le taux d'accroissement de g en b est :

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{g(y) - a}{f\big(g(y)\big) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a}}$$

Lorsque $y \to b$ alors $g(y) \to g(b) = a$ et donc ce taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{f'(a)}$ par composition de limites. Ainsi $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

3.6.3 Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau suivant est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable.

Fonction	**Dérivée**
$x^n, \quad (x \in \mathbb{R},\ \text{ou } x \in \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0)$	$nx^{n-1} \quad (n \neq 0), \quad x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \in]0, +\infty[$
$x^\alpha, \quad x \in]0, +\infty[\quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}, \quad x \in]0, +\infty[$
$e^x, \quad x \in \mathbb{R}$	$e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
$a^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (a > 0)$	$\ln(a)a^x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\ln\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$
$\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$	$-\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$	$\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\tan x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x, \quad x \in [-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[$
$\arccos x, \quad x \in [-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[$
$\arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

3.6.4 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' := (f')'$ la ***dérivée seconde*** de f. Plus généralement on note (lorsque ces dérivées existent) :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \big(f^{(n)}\big)' = \big(f'\big)^{(n)}$$

Si la ***dérivée n-ième*** $f^{(n)}$ existe on dit que f est n ***fois dérivable***.

Remarque 6.40. Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f et g deux fonctions n fois dérivables, alors

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

La démonstration de la formule est similaire à celle de la formule du binôme de Newton (à savoir : par récurrence) et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

Exemple 6.41

- Pour $n = 1$ on retrouve $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- Pour $n = 2$, on a $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

3.7 Extremum local, théorème de Rolle

3.7.1 Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 7.42

- On dit que f admet un ***maximum local en a*** (resp. un ***minimum local en a***) s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que

$$\forall x \in I \cap J \quad f(x) \leqslant f(a)$$

(resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
- On dit que f admet un ***extremum local***[a] ***en a*** si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

[a] pluriel : extrema sans "s", car le mot est une importation du latin

Dire que f a un maximum local en a signifie que $f(a)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de a. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un ***maximum global*** en a si pour toutes les autres valeurs $f(x)$, $x \in I$ on a $f(x) \leqslant f(a)$ (on ne regarde donc pas seulement les $f(x)$ pour x proche de a). Bien sûr, un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

Théorème 7.43. (Critère de Fermat)

Soit I un intervalle ***ouvert*** et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en a alors $f'(a) = 0$.

On dit que a est un ***point critique*** de f si $f'(a) = 0$. En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) a est toujours un point critique. La réciproque est fausse, voir $f(x) = x^3$ en $x = 0$. Géométriquement, au point $(a, f(a))$ la tangente au graphe est horizontale dans un point critique.

Démonstration

Supposons que a soit un maximum local de f, soit donc $J \subset I$ l'intervalle ouvert contenant a tel que pour tout $x \in J$ on a $f(x) \leqslant f(a)$.

- Pour $x \in I \cap J$ tel que $x < a$ on a $f(x) - f(a) \leqslant 0$ et $x - a < 0$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$.
- Pour $x \in J$ tel que $x > a$ on a $f(x) - f(a) \leqslant 0$ et $x - a > 0$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$.

Or f est dérivable en a donc

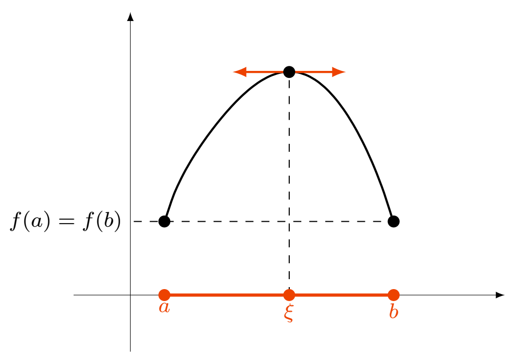
$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est que $f'(a) = 0$.

3.7.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 7.44. Rolle [a]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable dans l'intérieur (a, b) de l'intervalle. On suppose en plus que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $\xi \in (a, b)$ tel que $f'(\xi) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Démonstration

La fonction f est bornée sur $[a, b]$ et admet donc un minium et un maximum global sur $[a, b]$. Si les deux sont égaux, f est constante, et on peut choisir ξ comme on veut dans (a, b). Sinon, les extrema locaux sont situés dans (a, b) et le critère 7.43 assure l'existence du ξ en question.

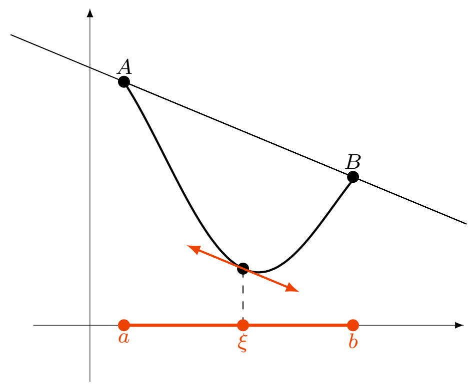
---

a. Michel Rolle, né à Ambert le 21 avril 1652 et mort à Paris le 8 novembre 1719, est un mathématicien français.

Théorème 7.45. accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\ (b - a)$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Démonstration

Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$. Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$. Par le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g'(\xi) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corollaire 7.46

Soit f une fonction dérivable de dérivée nulle sur (a, b). Alors f est constante.

En effet, si f n'est pas constante, elle prend deux valeurs différentes dans cette intervalle, et donc sur un point intermédiaire ξ une valeur non-nulle de sa dérivée. Le corollaire est la contraposée de cette observation.

3.7.3 Fonction croissante et dérivée

Corollaire 7.47

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $(\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geqslant 0) \iff f$ est croissante sur $[a, b]$;
2. $(\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leqslant 0) \iff f$ est décroissante sur $[a, b]$;
3. $(\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0) \iff f$ est constante sur $[a, b]$;
4. $(\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0) \implies f$ est strictement croissante sur $[a, b]$;
5. $(\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0) \implies f$ est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Démonstration

Prouvons par exemple (1).

Sens $\Longrightarrow$. Prenons $x, y \in [a,b]$ tels que $x < y$. f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, avec le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$$

et en déduit que $f(y) \geqslant f(x)$ de $f'(c) \geqslant 0$. f est croissante sur $[a,b]$.

Sens $\Longleftarrow$. Réciproquement, supposons que f est croissante sur $[a,b]$, fixons $x \in]a,b[$. Pour tout $y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geqslant 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$. à la limite, quand $y \to x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geqslant 0$.

Théorème 7.48. (Extrema locaux revisités)

Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et x_0 un point critique de f dans cet intervalle.

1. Alors f possède un minium local en x_0 s'il existent $\alpha < x_0 < \beta$ tels que
$$f'(x) \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad (\alpha, x_0) \qquad \text{et} \qquad f'(x) \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad (x_0, \beta)$$
2. Alors f possède un maximum local en x_0 s'il existent $\alpha < x_0 < \beta$ tels que
$$f'(x) \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad (\alpha, x_0) \qquad \text{et} \qquad f'(x) \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad (x_0, \beta)$$

En particulier, si f est deux fois dérivable, et $f''(x_0) > 0$, il s'agit d'un minimum local, et si $f''(x_0) < 0$ il s'agit d'un maximum local.

3.7.4 Inégalité des accroissements finis

Corollaire 7.49. Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe une constante M tel que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant M$ alors

$$\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x-y|.$$

Démonstration

Fixons $x, y \in I$ et supposons $x < y$. f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, avec le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ et comme $|f'(c)| \leqslant M$ alors
$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x-y|.$$

Exemple 7.50

Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient $|\sin x| \leqslant |x|$ ce qui est particulièrement intéressant pour x proche de 0.

3.7.5 Règle de l'Hospital

Lemme 7.51. (extension des accroissement finis)

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et dérivables dans (a, b). Supposons $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors $g(a) \neq g(b)$ et il existe un $\xi \in (a, b)$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Démonstration

Si $g(a) = g(b)$ le lemme de Rolle montre l'existence d'un x avec $g'(x) = 0$. Ceci n'est pas le cas : ainsi, les hypothèses assurent $g(a) \neq g(b)$. Posons

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) .$$

Puisque $F(a) = F(b) = f(a)$, le lemme de Rolle montre qu' il existe un $\xi \in (a, b)$ avec $F'(\xi) = 0$, c'est à dire

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g'(\xi)) .$$

Corollaire 7.52. (règle de l'Hospital)

Soient $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $g'(x) \neq 0$ sur (a, b). On suppose en plus

Soit $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0$

Soit $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = +\infty$

Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \qquad \text{implique} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

On a un résultat analogue lorsque $x \to a+$

Démonstration

Traitons d'abord le cas d'une limite nulle des deux fonctions. Quitte a agrandir a on peut supposer que f, g sont continues sur $[a, b]$, dérivables sur (a, b) et par l'extension des accroissement finis, il existe pour tout $x \in (a, b)$ un ξ_x avec

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Quand $x \to b-$, la valeur intermédiaire $\xi_x \to b-$, et le résultat suit.

Supposons maintenant que f, g tendent vers $+\infty$. L'idée est évidement de se ramener aux réciproques. D'abord, pour éviter de diviser par zéro, on peut agrandir la borne inférieure a de l'intervalle(a, b) un peu pour assurer $f(x) \geqslant 1$ et $g(x) \geqslant 1$ sur (a, b).

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe alors un $\delta > 0$ tel que

$$|\ell - u| < \delta \quad \text{et} \quad |1 - v| < \delta \quad \Rightarrow |\ell - uv| \leqslant |\ell - u| + |u|.|1 - v| < \varepsilon$$

Par définition, l existe un $M > 0$ tel que $\xi > M$ implique

$$\left|\ell - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < \delta$$

et donc, par le lemme,

$$\left|\ell - \frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)}\right| < \delta$$

pour tout $x > M$. On écrit alors

$$\left|\ell - \frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\ell - \underbrace{\frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)}}_{=u} \underbrace{\frac{1 - \frac{g(M)}{g(x)}}{1 - \frac{f(M)}{f(x)}}}_{=v}\right|$$

et observe que $|1 - v| < \delta$ pour $f(x), g(x)$ suffisamment grand — ce qui entraîne

$$\left|\ell - \frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$$

comme voulu !

Exemple 7.53

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$. On vérifie que :

- $f(x) = \cos x - 1$, $f(0) = 0$, $f'(x) = -\sin x$,
- $g(x) = x^2$, $g(0) = 0$, $g'(x) = 2x$, $g'(0) = 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin x}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2} \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}.$$

- $h(x) = x^\alpha \ln(x)$, avec $\alpha > 0$. On écrit $h(x) = \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}}$, et obtient

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha - 1}} = -\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0.$$

Il suit que $h(x) = x^\alpha \ln(x) \to 0$ quand $x \to 0+$. «croissances comparées». En posant $x = e^{-t}$, on déduit de la précédente limite que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha t} t^n = 0$$

pour tout $n \geqslant 0$.

3.8 Formules de Taylor

Théorème 8.54. Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Alors, pour tout $x \neq a \in I$ il existe un ξ entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x - a)^j + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - a)^k$$

Démonstration

On peut supposer $a < x$ pour simplifier la notation. Soit $F(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$. et $G(x) = (x-a)^k$. Alors $F(a) = F'(a) = \ldots = F^{(k-1)}(a) = 0$ et pour $0 \leqslant j < k$, la dérivée $G^{(j)}(x) = k(k-1)\ldots(k-j+1)(x-a)^{k-j}$ s'annule si et seulement si $x = a$. On peut appliquer le lemme de proche en proche pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \\ &= \frac{F'(\xi_1)-F(a)}{G'(\xi_1)-G(a)} = \frac{F'(\xi_2)}{G'(\xi_2)} \\ &\vdots \\ &= \frac{F^{(k-1)}(\xi_{k-1})-F(a)}{G^{(k-1)}(\xi_{k-1})-G(a)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)} = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!}\end{aligned}$$

Alors $F(x) = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!}G(x)$ ce qui est équivalent à l' énoncé.

On appelle $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\xi - a)^k$ le **reste de Lagrange**[1] dans la formule de Taylor. Il y a autres formulations du reste (reste de Young, reste intégral), mais une formulation fera l'affaire pour le moment.

Remarque 8.55

On rappelle que C^k signifie que la dérivée k-ième est encore continue. Alors, on a, sous les hypothèses du théorème,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + (x-a)^k \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$. En effet, il suffit de voir le comportement du terme

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-a)^k = (x-a)^k \, \tfrac{f^{(k)}(a)-f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

qui est bien de la forme $(x-a)^k\varepsilon(x)$ demandé : la continuité de $f^{(k)}$ donne que la fraction (notre ε) a limite nulle en $x = a$.

Définition 8.56. (notation de Bachmann-Landau)

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles, toutes deux définies dans un voisinage V de a. On écrit

$$f = \mathcal{O}(g)$$

(le «grand O» veut dire : "du même ordre que", d'où la lettre "O", s'il existe $M > 0$ telle que, dans V

$$|f(x)| \leqslant Mg(x).$$

On dit que ***f est négligeable devant g***, et on écrit alors

$$f = o(g)$$

1. Joseph Louis de Lagrange (en italien Giuseppe Luigi Lagrangia ou aussi Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier), né à Turin en 1736 de parents français descendants de Descartes et mort à Paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome sarde, avec une vitae "européenne" : à l'âge de trente ans, il quitte Turin et va séjourner à Berlin pendant 21 ans. Ensuite, il s'installe pour ses vingt-six dernières années à Paris où il prend la nationalité française en 1802

s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = g(x).\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Ces notations sont commodes quand la forme exacte de la constante M ou de la fonction ε ne sont pas importants. Par exemple :

Exemple 8.57. Expression de la différentiabilité en un point

Avec ces notations, on peut exprimer le fait qu'une fonction f définie dans un intervalle ouvert I non réduit à un point et contenant a, soit dérivable en a par :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \text{ au voisinage de } 0.$$

Exemple 8.58. Taylor

Sous les hypothèses du théorème,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + o((x-a)^k)$$

3.8.1 Développements limités

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $x = a$ admet un développement limité d'ordre n, si il existe un polynôme de degré $\leqslant n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n,$$

tel que

$$f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n).$$

P_n est la **partie régulière** du DL. **Attention aux pièges de la notation de Landau :** pour n'importe quelle fonction bornée g,

$$f(x) - (P_n(x) + (x-a)^n g(x)) = o((x-a)^n).$$

ce qui implique que juste demander l'existence d'une fonction h avec $f - h = o(x^n)$ ne définit pas h de façon unique. C'est pour cela qu'on demande (a) un polynôme et (b) pose une condition sur son degré. Ceci explique aussi le vocabulaire de *partie régulière*.

Observation gratuite : en posant $y = x - a$, lorsque x tend vers a alors y tend vers 0. On peut donc se ramener très facilement à un DL au voisinage de 0. Il suit du théorème de Taylor que toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de $x = a$ admet un DL d'ordre n. Pour gagner du temps de calcul, il est utile et conseillé de connaître certains DL de fonctions usuelles par coeur, à savoir :

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
\ln(1-x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

A partir de ces DL, on peut déduire autres grâce aux règles suivantes :

Propriété 8.59

Supposons que f, g admettent un DL ordre n en $x = a$, avec polynômes P_n et Q_n respectivement.

1. La partie régulière R_n du DL ordre n de $f + g$ est $P_n + Q_n$.
2. La partie régulière R_n du DL ordre n de $f \cdot g$ s'obtient en préservant du produit $P_n \cdot Q_n$ les termes de puissance $\leqslant n$.
3. La partie régulière R_n du DL ordre n de f/g s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes P_n par Q_n, jusqu'à l'ordre n. Ou, alternativement, en utilisant le DL de $1/(1-u)$...

Exemple 8.60

Soit $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$.

1. La partie régulière R_4 du DL ordre 4 (en $x = 0$) de $\cos(x) - \sin(x)$ est

$$R_4(x) = P_4(x) - Q_4(x) = (1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4) - (x - \tfrac{1}{6}x^3).$$

2. La partie régulière R_4 du DL ordre 4 (en $x = 0$) de $\cos(x) \cdot \sin(x)$ s'obtient en multipliant

$$P_4(x)Q_4(x) = (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) \cdot (x - \frac{1}{6}x^3) = \frac{-1}{144}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + x$$

puis en "jetant" les termes d'ordre $\geqslant 5$: on a donc

$$R_4(x) = -\frac{2}{3}x^4 + x$$

Dans la pratique, quand les puissances dépassent $n = 4$, on ne calcule même pas les coefficients !

3. La partie régulière R_4 du DL ordre 4 (en $x = 0$) du quotient $\sin(x)/\cos(x)$ s'obtient en écrivant

$$\frac{Q_4(x)}{P_4(x)} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4} = x\frac{1 - \frac{1}{6}x^2}{1 - u} \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4.$$

Alors, par troncature au rang 2, de l'expression $1/(1 - u) = 1 + u + u^2 + ..$ on obtient que la partie régulière R_4 du DL du quotient $\sin(x)/\cos(x)$ en $x = 0$ coïncide avec la partie régulière du quotient

$$x(1-\frac{1}{6}x^2)(1+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4)+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4)^2) \qquad \text{(les autres termes sont d'ordre} > 4\,!)$$

Vu le facteur x devant, il est inutile de garder dans la dernière parenthèse autres que des termes d'ordre $\leqslant 3$, ce qui nous ramène à

$$x(1 - \frac{1}{6}x^2)(1 + \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{3}x^4 + x^2 + o(x^4)$$

Il suit enfin que

$$R_4(x) = \frac{1}{3}x^4 + x^2. \qquad \text{Ouff !}$$

Chapitre 4

Intégrales

4.1 L'intégrale de Riemann

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'intégrale de Riemann sur un segment, d'une fonction réelle bornée. Dans le cas d'une fonction positive, cette intégrale s'interprète comme l'aire du domaine sous la courbe représentative de la fonction. Le procédé général utilisé pour définir l'intégrale de Riemann est l'approximation par des fonctions en escalier, pour lesquelles la définition de l'aire sous la courbe est simple.

4.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.61

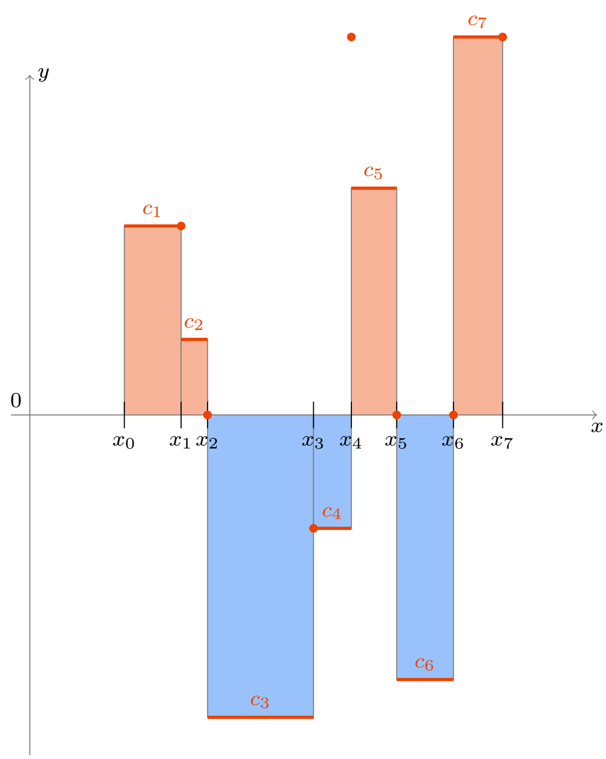
Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle une ***subdivision*** de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Définition 1.62

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une ***fonction en escalier*** s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

$$\forall x \in (x_{i-1}, x_i) \quad f(x) = c_i$$

Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles ouverts de la subdivision.



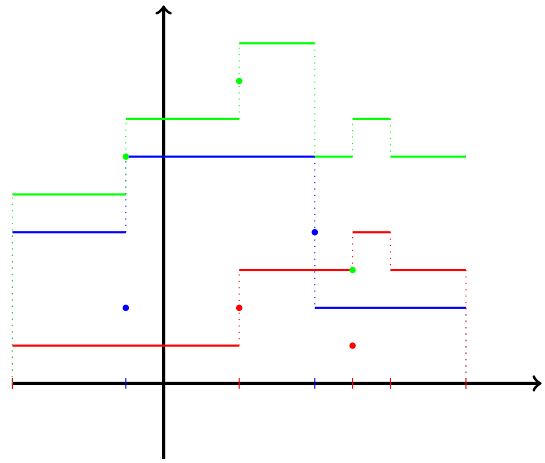
Rien d'est dit sur les points de la subdivision ! En revanche, comme f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est bornée. Si f est une fonction en escalier, il n'y a pas une unique subdivision associé : on appelle alors une subdivision $(t_0, ..t_n)$ ***admissible pour f*** s'il existe des coefficients c_i tels que

$$f|_{(t_i, t_{i+1})} = c_i$$

Ceci est intéressant pour définir la somme de deux fonctions f, g en escalier : si $g|_{(s_i, s_{i+i})} = d_i$, on peut passer pour chacune des deux fonctions à une subdivision *commune*

$$\{t_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{s_j : 1 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Par rapport à cette subdivision, la somme $f + g$ sera à nouveau en escalier. Voici un dessin avec f, g et $f + g$.



D'autre part, la multiplication d'une fonction en escalier préserve son caractère d'escalier.

Propriété 1.63

La somme, des multiples scalaires, le minimum et le maximum ainsi que des valeurs absolues de fonctions en escalier sont des fonctions en escalier.
En particulier, l'ensemble $\mathcal{E}([a,b])$ des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ est un espace vectoriel réel.

Lemme 1.64

Soit f une fonction en escalier. Alors pour toute subdivision $S=(x_0,..,x_n)$ qui est admissible pour f, la valeur

$$\int_S f := \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}),$$

est indépendante de la subdivision, et on l'appelle l'intégrale de f.

L'idée de la preuve consiste à observer que si on part d'une subdivision S et on ajout *un seul* point pour obtenir $\tilde{S}$, alors un seul intervalle (x_j, x_{j+1}) de S est "coupé en deux" :

$$(x_j, x_{j+1}) \qquad \text{devient} \qquad (x_j, t) \cup (t, x_{j+1}).$$

Il est facile de voir que

$$\int_S f = \int_{\tilde{S}} f$$

car dans les deux sommes les seuls termes différents sont $c_j(x_{j+1} - x_j)$ coté gauche et $c_j(x_{j+1} - t) + c_j(t - x_j)$ coté droite. Mais la somme à droite est égale au terme de gauche. On peut répéter cette procédure un nombre fini de fois et passer, point par point ajouté, et sans que la valeur ne change, de S_1 à $S_1 \cup S_2$ et de S_2 à $S_1 \cup S_2$.

Définition 1.65

Soit f une fonction en escalier et S une subdivision admissible. On pose alors

$$\int_a^b f(x)dx := \int_S f$$

Par le lemme cette valeur est bien définie, car indépendante de S.

L'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i est égale à $c_i(x_i - x_{i-1})$. On compte l'aire avec un signe positif si la courbe est au dessus de l'axe des abscisses, c'est-à-dire si $c_i > 0$ et avec un signe négatif si $c_i < 0$. L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses (ici en rouge) moins l'aire de la partie située en dessous (en bleu).

Propriété 1.66

Soient ψ et φ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$. Alors

1. $\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx$.
2. Pour tout réel λ, $\int_a^b \lambda\,\varphi(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx$.
3. Si pour tout $x \in [a, b]$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ alors $\int_a^b \psi(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx$.
4. Pour tout $c \in [a, b]$, $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^c \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx$.

Démonstration

Quitte à re-découper les subdivisions, on peut trouver $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision commune à ψ et φ telle que

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad \psi(x) = c_i \quad \text{et} \quad \varphi(x) = d_i.$$

Alors

$$\int_a^b \varphi(x)+\psi(x)\,dx = \sum_i (c_i+d_i)(x_i-x_{-1}) = \sum_i c_i(x_i-x_{-1}) + \sum_i d_i(x_i-x_{-1}) = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx$$

Le point (2) est plus simple. Pour 3. par hypothèse, pour tout i, $c_i \leqslant d_i$ et

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Pour 4. quitte à re-découper la subdivision on peut supposer qu'il existe un indice p tel que $x_p = c$. Si p vaut 0 (cas où $c = a$) ou n (cas où $c = b$), il n'y a rien à démontrer. Si $1 \leqslant p \leqslant n-1$ alors

$$\int_a^c \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^p c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=p+1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4.1.2 Fonction intégrable

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est ***bornée*** s'il existe deux réels m et M tels que :

$$\forall x \in [a, b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors on note $f \leqslant g$ lorsque

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On note par

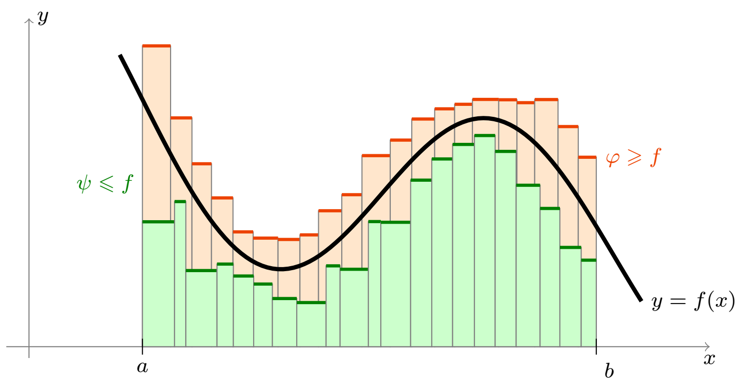
$$A = \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx \text{ , } \psi \text{ en escalier et } \psi \leqslant f \right\}$$

$$B = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \text{ , } \varphi \text{ en escalier et } f \leqslant \varphi \right\}$$

Comme f est bornée sur $[a,b]$, $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a,b]$, alors A est non vide car il contient l'intégrale de la fonction constante $x \mapsto m$ et B est non vide car il contient l'intégrale de la fonction constante $x \mapsto M$. Donc A et B sont non-vides. Clairement $M(b-a)$ est un majorant de A et $m(b-a)$ est minorant de B. Ainsi

$$\mathcal{I}^-(f) = \sup A = \sup \left\{ \int_a^b \psi(x)\, dx \mid \psi \text{ en escalier et } \psi \leqslant f \right\}$$
$$\mathcal{I}^+(f) = \inf B = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\, dx \mid \varphi \text{ en escalier et } f \leqslant \varphi \right\}$$

existent.



Pour $\mathcal{I}^-(f)$ on prend toutes les fonctions en escalier (avec toutes les subdivisions possibles) qui restent inférieures à f. On voudrait l'aire la plus grande parmi toutes ces fonctions en escalier, comme on n'est pas sûr que ce maximum existe on prend la borne supérieure. Pour $\mathcal{I}^+(f)$ c'est le même principe mais les fonctions en escalier sont supérieures à f et on cherche l'aire la plus petite possible. Pour toutes fonctions en escaliers ψ et φ telles que $\psi \leqslant f \leqslant \varphi$ on a $\int_a^b \psi(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx$ et on obtient le résultat suivant

Propriété 1.67

$\mathcal{I}^-(f) \leqslant \mathcal{I}^+(f)$.

Le problème est que il n'y a pas de garantie que $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f)$ ce qui nous amènerait à un notion “d'aire sous la surface” bien définie. Par exemple, **la fonction de Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

alors par la densité de $\mathbb{Q}$, toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}([0,1])$ qui satisfait $\varphi \leqslant f$ satisfait nécessairement $\varphi \leqslant 0$, tandis que $\psi \geqslant f$ et $\psi \in \mathcal{E}([0,1])$ implique $\psi \geqslant 1$. En même temps les fonctions $\varphi = 0$ et $\psi = 1$ sont en escaliers. On obtient ainsi

$$\mathcal{I}^-(f) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}^+(f) = 1.$$

Maintenant, quand on n'a pas automatiquement une propriété souhaitable, on la transforme en définition, puis l'étudie :

Définition 1.68

Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite ***intégrable*** (***au sens de Riemann***) si

$$\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f).$$

On appelle alors ce nombre ***l'intégrale de Riemann*** de f sur $[a,b]$ et on le note $\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque 1.69

- La notation "dx" est un résidu de la notation de Leibniz ; elle articule l'idée d'une somme —le signe $\int$ est un «S» allongé, stylise— d'aires infinitésimales, celles de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur dx. Dans la notation moderne, le "dx" sert essentiellement à se rappeler de la variable d'intégration. Si f dépend d'un paramètre, disons, t, l'expression
$$\int_a^b f(t,x)\,dx$$
nous rappelle de calcule, pour t fixé, la valeur de l'intégrale de la fonction $x \mapsto f(t,x)$.
- Dans une certaine mesure, la variable d'intégration est échangeable, comme «variable muette» : par exemple
$$\int_0^1 \sin(x)\,dx = \int_0^1 \sin(u)\,du.$$
De l'autre coté la «nouvelle variable» doit être libre pour éviter des bêtises. Par exemple,
$$x^2 = \int_0^1 2x^2 \cdot y\,dy \quad \neq \quad \int_0^1 2x^2 \cdot x\,dx = \tfrac{1}{2}.$$
- Les fonctions en escalier sont intégrables.
- Nous verrons dans la section suivante que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.

Exemple 1.70

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Soit $n \geqslant 1$ et considérons la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante $\mathcal{S} = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ nous avons
$$\forall x \in \left[\tfrac{i-1}{n}, \tfrac{i}{n}\right] \qquad \frac{i-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{i}{n}\,.$$

Nous construisons une fonction en escalier φ^- minorant f sur $[0,1]$ par : $\varphi^-(x) = \frac{i-1}{n}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1,\ldots,n$) et $\varphi^-(1) = 1$. De même nous construisons une fonction en escalier φ^+ majorant f sur $[0,1]$ par : $\varphi^+(x) = \frac{i}{n}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1,\ldots,n$) et $\varphi^+(1) = 1$. φ^- et φ^+ sont des fonctions en escalier et l'on a $\varphi^- \leqslant f \leqslant \varphi^+$.

L'intégrale de la fonction en escalier φ^+ est par définition
$$\int_0^1 \varphi^+(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

De même pour la fonction φ^- :
$$\int_0^1 \varphi^-(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2}\frac{n-1}{n} \leqslant \mathcal{I}^-(f) \leqslant \mathcal{I}^+(f) \leqslant \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$. Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$ alors les deux extrémités tendent vers $\frac{1}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{2} \leqslant \mathcal{I}^-(f) \leqslant \mathcal{I}^+(f) \leqslant \frac{1}{2}$ puis que $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f) = \frac{1}{2}$. Ainsi f est intégrable (au sens de Riemann) et $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ ce qui coïncide avec « l'aire sous la courbe » de la fonction f sur $[0,1]$ (le triangle de sommet $(0,0),(1,0),(1,1)$).

Remarque: Point méthode pour montrer l'intégrabilité

Si on analyse la démarche de l'exemple précédent, pour montrer que la fonction f est intégrable on a construit deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n^-)_n$ et $(\varphi_n^+)_n$ telles que pour tout entier n, $\varphi_n^- \leqslant f \leqslant \varphi_n^+$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b \varphi_n^+(t)\,dt - \int_a^b \varphi_n^-(t)\,dt\right) = 0$. Cette démarche est très générale et sera reprise puisque de $\varphi_n^- \leqslant f \leqslant \varphi_n^+$ on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_a^b \varphi_n^-(t)\,dt \leqslant \mathcal{I}^-(f) \leqslant \mathcal{I}^+(f) \leqslant \int_a^b \varphi_n^+(t)\,dt$$

puis de $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b \varphi_n^+(t)\,dt - \int_a^b \varphi_n^-(t)\,dt\right) = 0$ on déduit que $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f)$ et donc que f est intégrable sur $[a,b]$.

Propriété 1.71

1. **Critère d'intégrabilité :** une fonction bornée f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ avec
$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi)\,dx \leqslant \varepsilon$$
2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors la fonction f est toujours intégrable et la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ ne change pas.
3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors la restriction de f à tout intervalle $[a',b'] \subset [a,b]$ est encore intégrable.

Démonstration

Le premier point vient presque de la définition de l'intégrale, et celle d'un sup/inf : pour $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ avec $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et

$$\int_a^b \psi \leqslant I^+(f) + \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad I^-(f) - \varepsilon/2 \leqslant \int_a^b \varphi$$

Le deuxième point découle du premier : si S est une subdivision commune de φ et ψ (choisies selon le critère) et M un ensemble fini des points ou on a modifié des valeurs de f, alors $S \cup M$ est une subdivision admissible pour φ, ψ et

$$\int_S \varphi = \int_{S\cup M} \varphi \qquad \text{et} \qquad \int_S \psi = \int_{S\cup M} \psi$$

Le dernier point se montre pareillement : pour $\varepsilon > 0$, et φ, ψ choisies selon le critère avec une subdivision commune S on pose $S' = (S \cap [a',b']) \cup \{a',b'\}$. On restreint φ, ψ à $[a',b']$ et obtient (par monotonie !)

$$0 \leqslant \int_{a'}^{b'} \psi - \varphi = \int_a^b (\psi - \varphi)\mathbf{1}_{[a',b']} \leqslant \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Voici deux grandes classes de fonctions intégrables :

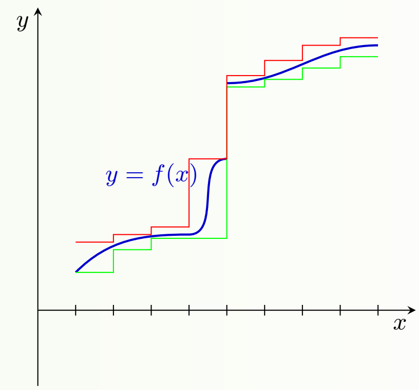
Théorème 1.72

Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est intégrable.

Démonstration

Supposons f croissante, cela ne change rien dans la suite. Montrons d'abord que f est bornée sur $[a,b]$. Avec l'hypothèse f croissante sur $[a,b]$, on a pour tout $x \in [a,b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. $f(a)$ est un minorant de f sur $[a,b]$ (c'est même le minimum de f) et $f(b)$ est un majorant de f sur $[a,b]$ (c'est même le maximum de f).
On découpe l'intervalle $[a,b]$ en n morceaux identiques de taille $(b-a)/n$, à savoir

$$x_k = a + \tfrac{k}{n}(b-a), \qquad k = 0, \dots, n.$$



On pose les fonctions en escalier φ et ψ en posant pour pour $k = 0, \dots, n-1$

$$\forall t \in [x_k, x_{k+1}) \quad \varphi(t) := f(x_k) \text{ et } \psi(t) := f(x_{k+1})$$

et $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$. On a donc $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et

$$0 \leqslant \mathcal{I}^+(f) - \mathcal{I}^-(f) \leqslant \int_a^b (\psi(t) - \varphi(t))dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)),$$

par téléscopage. On a prouvé intégrabilité de f puisque l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \mathcal{I}^+(f) - \mathcal{I}^-(f) \leqslant \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, $\mathcal{I}^+(f) = \mathcal{I}^-(f)$

Théorème 1.73

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Pour mettre en place l'idée, je présente une "fausse preuve" d'abord. On veut, comme avant, approcher f par sa valeur min/max sur un peut bout d'intervalle. Mais il y a un premier soucis :

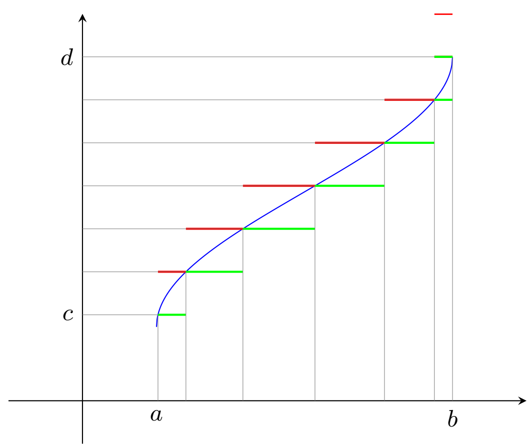
Exercice 1.74

Construire une fonction f sur un intervalle ainsi qu'une subdivsion "mal adapté" qui fait que

$$\max\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} \geqslant 1 + \min\{f(x) : t_i \leqslant x \leqslant t_{i+1}\}$$

à l'effet que le télescopage des valeurs d'un intervalle à l'autre échoue lamentablement. Indication : choisir f oscillant, et juste quelques (3,4) points pour comprendre le problème.

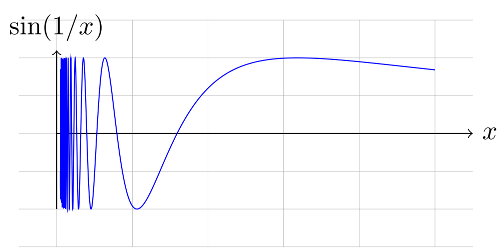
Puisqu'on ne peut pas découper $[a, b]$ comme on a fait pour les fonctions monotones, on va découper plutôt $f([a, b]) = [c, d]$. Soit alors $N \geqslant 1$ grand et $\varepsilon = \frac{1}{N}(d-c)$. On découpe donc l'image $[c, d]$ de f en N «pas» de longueurs égales par les points $y_i = c + i \cdot \varepsilon$.



L'idée serait de produire ainsi sur l'abscisse une subdivision (irrégulière) $\{t_0, \ldots, t_N\}$ de $[a, b]$ tel que $f(t_i) - f(t_{i-1}) = \varepsilon$. Imaginons que cela marche. Alors si on choisit les fonctions en escalier φ et ψ respectivement comme le minimum (vert) et maximum (rouge) de f sur chaque intervalle (t_{i-1}, t_i), on aura

$$\int_a^b \psi - \varphi = \sum_{i=1}^{N} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$$

où on utilise le téléscopage dans la dernière égalité : le tour est joué, car la droite peut être choisi aussi petit qu'on veuille. L'intégrabilité de f s'ensuit. Mais il y a un deuxième soucis dans cette construction, le «si» : comment garantir qu'un nombre fini de points t_i suffit ? N'oublions pas l'affreuse fonction $\sin(1/x)$ sur $(0, 1]$ qui donnerait, pour tout $y \in [-1, 1]$ une infinité d'antécédents !



Voici la bonne version de la preuve qui marche : l'idée est de remplacer la construction explicite de la subdivision, avec ses problèmes de justification contre un simple argument magique : mettons la compacité au travail !

Démonstration

On a vu avec le théorème de Heine (chapitre 2, Théorème 3.26) qu'alors f est uniformément continue sur $[a, b]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| \leqslant \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Avec $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ vérifiant pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$0 < x_i - x_{i-1} \leqslant \delta$$

nous pouvons construire des fonctions en escalier en posant

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = \inf\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\} \qquad \text{et} \qquad \psi|_{(x_{i-1}, x_i)} = \sup\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}$$

La continuité uniforme assure que, sur chaque intervalle (x_{i-1}, x_i), $0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$. Il suit par téléscopage que

$$0 \leqslant \int_a^b \psi(x) - \varphi(x)\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{N} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on conclut pat le critère intégrabilité.

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite ***continue par morceaux*** s'il existe un entier n et une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ telle que $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ soit continue, admette une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Corollaire 1.75

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux alors f est intégrable.

4.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 2.76

L'ensemble $\mathcal{R}([a,b])$ des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel des fonctions bornées de $[a,b]$ et donc un espace vectoriel lui-même. L'application

$$I : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{R}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f \end{array} \right.$$

est une application linéaire qui satisfait

1. Toute fonction $f \in \mathcal{R}([a,b])$ satisfait $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.
2. $$\forall f \in \mathcal{R}([a,b]) : \qquad \left| \int_a^b f\, dx \right| \quad \leqslant \quad \int_a^b |f|\, dx$$
3. $$\forall f, g \in \mathcal{R}([a,b]) : \qquad f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f\, dx \leqslant \int_a^b g\, dx$$
4. $$\forall f \in \mathcal{R}([a,b]) : \forall c \in (a,b) : \qquad \int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$$

Démonstration

Soient $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Il existent 4 suites de fonctions en escalier $(\varphi_n), (\varphi_n^*), (\psi_n), (\psi_n^*)$ telles que $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et $\varphi_n^* \leqslant g \leqslant \psi_n^*$ et telles que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n^* - \varphi_n^*) = 0$$

On utilise le critère du sous-espace vectoriel. Rappelons que les fonctions en escalier $\mathcal{E}([a,b])$ forment un espace vectoriel : ainsi sommes et multiples scalaire de fonctions en escalier sont en escalier. Or,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n + \psi_n^*) - (\varphi_n + \varphi_n^*) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) + (\psi_n^* - \varphi_n^*) = 0$$

la fonction $f+g$ est Riemann intégrable, et

$$\int_a^b f+g = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\psi_n+\psi_n^*) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n + \int_a^b \psi_n^*) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

ce qui donne l'additivité. Pour $\lambda \geqslant 0$, on a $\lambda\varphi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_n$ et

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (\lambda\psi_n - \lambda\varphi_n) = \lambda \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\psi_n-\varphi_n) = 0$$

ce qui implique que λf est Riemann intégrable. Comme avant,

$$\int \lambda f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \lambda\psi_n = \lambda\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n = \lambda\int_a^b f.$$

Pour $\lambda \leqslant 0$ on fait pareil en prêtant attention aux inégalités qui se renversent. Il s'agit donc bien d'un s.e.v. des fonctions bornées sur $[a,b]$.
Soit $f \geqslant 0$. Alors, par définition de la sous-intégrale $I^-(f)$,

$$\int_a^b f \geqslant I^-(f) \geqslant \int_a^b 0\,dx = 0$$

Ceci plus la linéarité donnent la monotonie (point 3).
Inégalité triangulaire : on a

$$u_n := \max(\varphi_n, -\psi_n) \leqslant |f| \leqslant \max(\psi_n, -\varphi_n) =: U_n$$

Il suit que les fonctions (es escalier) u_n, U_n encadrent $|f|$ et on observe

$$U_n - u_n = \max(\psi_n,-\varphi_n) - \max(\varphi_n,-\psi_n) = \max(\psi_n,-\varphi_n) + \min(-\varphi_n,\psi_n) = \psi_n - \varphi_n.$$

Il suit que $\lim_{n\to\infty}\int_a^b U_n - u_n\,dx = 0$ et avec cela l'intégrabilité de $|f|$. Mais alors, $\pm f \leqslant |f|$ donne par monotonie et linéarité

$$\pm\int_a^b f\,dx = \int_a^b \pm f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx$$

ce qui implique $\left|\int_a^b f\right|\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx$.
La règles de Chasles s'étend directement de la règles de Chasles pour les fonctions en escalier.

On peut d'étendre la propriété de Chasles pour toute valeur $c \in \mathbb{R}$ en posant

Définition 2.77

Soit $a \leqslant b$ deux réels et f une fonction intégrable sur $[a,b]$. On définit

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

en effet, en considérant les 6 possibilités de position des points a,b,c sur la ligne réelle, on observe que Chasles restera vrai ou que c se situe.

Corollaire 2.78

Soient $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$ tels que $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ est fini. Alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Démonstration

Soit $\{x : f(x) \neq g(x)\} = \{t_0, t_1, .., t_n\}$. Sous les hypothèses, $h = g - f$ est une fonction nulle sur (t_{i-1}, t_i), donc une fonction en escalier avec intégrale nulle ! Il suit que f et $g = f + h$ ont la même intégrale.

Corollaire 2.79

Soient $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Alors $f \cdot g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ et $|f|^p$ (pour $p \geqslant 1$) sont Riemann intégrables.

Démonstration

Observons que

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f+g|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(f,g) = \frac{f+g-|f+g|}{2}$$

Observons par la suite que $0 \leqslant x \leqslant y$ implique d'après les accroissement finis que

$$y^p - x^p = (y-x) \cdot p\xi^{p-1} \leqslant py^p(y-x)$$

Or $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$, il existent deux suites $(\varphi_n), (\psi_n)$ avec $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n - \varphi_n = 0.$$

On pose $\Phi_n = \max(0, \varphi_n)$ et $\Psi_n = \min(\psi_n, \max(|f|))$. Ceci implique

$$0 \leqslant \Phi_n \leqslant |f| \leqslant \Psi_n \leqslant \nVdash \max(|f|).$$

Le signe sous contrôle, on peut passer à la puissance p sans abîmer les inégalités. Il suit

$$\int_a^b \Psi_n^p - \Phi_n^p \leqslant \int_a^b p\Psi_n^{p-1}(\Psi_n - \Phi_n) \leqslant p \max(|f|)^{p-1} \int_a^b (\Psi_n - \Phi_n) \quad \to \quad 0.$$

Ainsi $|f|^p$ est Riemann intégrable.
Appliquons ceci pour $p = 2$: les fonctions $f^2, g^2, (f+g)^2$ sont Riemann intégrables et

$$f \cdot g = \tfrac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$$

l'est donc aussi.

Exercice 2.80

Attention ! L'intégrale n'est pas multiplicatif ! On a, généralement

$$\int_a^b (f \cdot g) \neq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$$

Donner 3 exemples avec inégalité.

Théorème 2.81

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur $[a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée telles que

$$\lim_{n\to\infty} \max\{|f_n(x) - f(x)| : \quad a \leqslant x \leqslant b\} \quad = \quad 0.$$

(on parle de **convergence uniforme** dans ce cas). Alors f est Riemann intégrable, et

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx$$

Démonstration

Il existent des fonctions en escalier telles que $\varphi_n \leqslant f_n \leqslant \psi_n$ et

$$0 \leqslant \int_a^b \psi_n - \varphi_n \, dx \leqslant \frac{1}{n}$$

Soit $M_n = \max\{|f_n(x) - f(x)| : \quad a \leqslant x \leqslant b\}$. Il suit que

$$f = f - f_n + f_n \leqslant |f - f_n| + \psi_n \leqslant \nVdash M_n + \psi_n$$

et de façon analogue

$$f = f_n + f - f_n \geqslant \varphi_n - |f - f_n| \geqslant \varphi_n - \nVdash M_n$$

A droite des deux inégalités on observe des fonctions en escalier. Elles satisfont

$$\int_a^b (\nVdash M_n + \psi_n) - (\varphi_n - \nVdash M_n) \, dx = \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \, dx + 2M_n(b-a)$$

Mais les deux termes, l'intégrale et tout multiple de M_n tendent vers zéro, donc leur somme. Il suit que f est Riemann intégrable.
Ensuite, on conclut avec

$$\left| \int_a^b f \, dx - \int_a^b f_n \, dx \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \, dx \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \, dx \leqslant int_a^b M_n \nVdash \, dx = M_n(b-a) \to 0.$$

Pour aller plus loin 2.82

La convergence «point-par-point» ne suffit pas pour transférer l'intégrabilité de f_n sur f. Exemple : soit (r_n) une énumération de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ et

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f_n est escalier (car nulle, sauf dans un nombre fini de points) mais la limite ponctuelle

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

n'est pas intégrable – il s'agit de la fonction de Dirichlet discuté en haut !

Pour aller plus loin 2.83

Voici un exercice «dur», qui résume toute la construction de l'intégrale de Riemann. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

On observe que f est discontinue en tout point rationnel (car $x \in \mathbb{Q}$ s'approche avec une suite d'irrationnels, notamment $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$!). Montrer que f est quand même Riemann intégrable et calculer son intégrale. Cet exercice mérite de passer du temps à y réfléchir, sans céder à la tentation de chercher sur internet ou de demander un(e) camarade. Commencer à esquisser le graphe de f ... bon, disons, quelques valeurs sur quelques rationnels.

4.2.1 Sommes de Riemann

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Elles pourront permettre de calculer la valeur approchée d'une intégrale lorsqu'on ne sait pas faire un calcul direct. Mais si nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut aussi faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 2.84

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Démonstration

On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0, \dots n$ et on note $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big)$. En remarquant que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ et

$$(x_k - x_{k-1})f(x_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)dt,$$

on a

$$(x_k - x_{k-1})f(x_k) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(t))dt.$$

Donc

$$S_n - \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(t))dt.$$

Puisque f est continue sur $[a, b]$, le théorème de Heine implique que f est uniformément continue sur le segment $[a, b]$. Rappelons que $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Donc grâce à l'uniforme continuité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $t \in [x_{k-1}, x_k]$ on a $|f(x_k) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. On a ainsi :

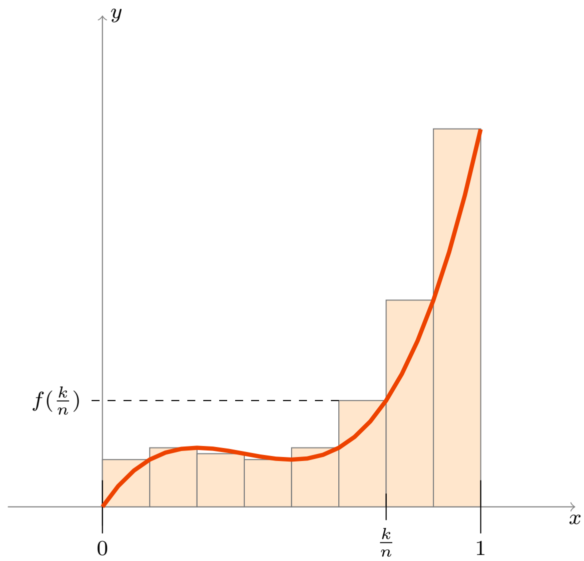
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n \geqslant N \quad \Big|S_n - \int_a^b f(t)dt\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x_k) - f(t)|dt \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} = \varepsilon(b-a).$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)dt$.

La somme S_n s'appelle la ***somme de Riemann*** associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.

Le cas le plus utile est le cas où $a = 0$, $b = 1$ alors $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ et ainsi

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_0^1 f(x)\, dx$$



Remarque

Nous avons aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Cela revient à prendre la valeur de f à l'extrémité gauche de chaque intervalle de la subdivision.

Exemple 2.85

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

On a $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \ldots$

La somme S_n s'écrit aussi

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. f est continue sur $[0, 1]$ donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x) \end{aligned}$$

et
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$
Ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$.

4.3 Primitive d'une fonction

4.3.1 Définition

Définition 3.86

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un **intervalle** I quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une ***primitive*** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Propriété 3.87

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie **sur un intervalle** I de $\mathbb{R}$ et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ alors G est dérivable et $G'(x) = F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. G est bien une primitive de f.

Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f sur I. Alors $(G-F)'(x) = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0$, ainsi la fonction $G-F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, c'est donc une fonction constante. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G-F)(x) = c$. Autrement dit $G(x) = F(x) + c$ (pour tout $x \in I$).

Exemple 3.88

Pourquoi a-t-on écrit «sur un intervalle I» en gras ? ? Considérons $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$. Alors $F(x) = \frac{-1}{x}$ est une primitive, et
$$G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 2 - \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
est une autre, sans que $F - G$ soit constant.

Théorème 3.89. Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle et $f : \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in I$, la fonction $F : \ I \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
est une primitive de f, c'est-à-dire F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Par conséquent pour une primitive G quelconque de f et $a, b \in I$,
$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

Démonstration

Soit $x_0 \in [a,b]$ Comme $f(x_0)$ est une constante alors $\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = (x-x_0)f(x_0)$, donc

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que ($|t-x_0| < \delta \implies |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$).
Donc :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x \varepsilon\,dt\right| = \varepsilon$$

Ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. F est une primitive de f, F est même la primitive de f qui s'annule en a car $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Si G est une autre primitive de f sur I, on sait qu'il existe c tel que $F = G + c$. Ainsi

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - \big(F(a) + c\big) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Remarque

1. $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est ***l'unique primitive de f qui s'annule en a.***
2. En particulier si F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b$$

3. On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. C'est absurde comme notation. On change la variable muette à la place : $\int_a^x f(t)\,dt$ ou $\int_a^x f(u)\,du$ pour éviter toute confusion.
4. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérer par exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. f est une fonction en escalier donc intégrable sur $[0,1]$ mais elle n'admet pas de primitive sur $[0,1]$. En effet par l'absurde si F était une primitive de f, par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$. Alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $F(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Mais alors nous obtenons une contradiction car F n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

Notations. On notera une primitive de f par

$$\int f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int f(x)\,dx \quad \text{ou} \int f(u)\,du, \quad \int f$$

La propriété 3.87 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c, tel que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c.$$

Attention : $\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel.

En dérivant on prouve facilement le résultat suivant :

Propriété 3.90

Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf.

4.3.2 Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ sur $(0,+\infty)$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + c \quad$ sur $(0,+\infty)$ ou $(-\infty,0)$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \quad$ sur $(-1,1)$

4.4 Techniques de calcul d'intégrales

4.4.1 Intégration par parties

Théorème 4.91

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Notation. Le crochet $\big[F\big]_a^b$ est par définition $\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\big[uv\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.

La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

La preuve est très simple :

Démonstration

$(uv)' = u'v + uv'$ est une fonction continue sur $[a,b]$. Donc $\int_a^b (u'v+uv')(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b$. D'où $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Exemple 4.92

Calcul de $\int_0^1 xe^x\ dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\ dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\ dx \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\ dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 \quad - \quad \int_0^1 1\cdot e^x\ dx \\
&= \big(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1
\end{aligned}$$

4.4.2 Changement de variable

Théorème 4.93

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J. Pour tout $a, b \in J$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \times \varphi'(t)\ dt.$$

Si F est une primitive de f alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $\big(f\circ\varphi\big)\times\varphi'$.

De plus si φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de J sur I alors pour tout $c, d \in I$

$$\int_c^d f(x)\ dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f\big(\varphi(t)\big)\times\varphi'(t)\ dt.$$

Pour mémoriser : si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)\ dt$. D'où la substitution $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ dt$.

Démonstration

f est continue sur un intervalle I donc elle admet une primitive que l'on note F. Pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition (cf. $\varphi(J)\subset I$) on a

$$\forall t \in J, \quad (F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\times\varphi'(t) = f(\varphi(t))\times\varphi'(t).$$

Donc $F\circ\varphi$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ sur J. Pour tout a, b de J : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \big[F\circ\varphi\big]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$. Si de plus φ est une bijection, pour $c, d\in I$, on a le résultat en prenant $a = \varphi^{-1}(c)\in J$ et $b = \varphi^{-1}(d)\in J$.

Exemple 4.94

Primitive de la fonction tangente sur un intervalle de type $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note $F = \int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln|u|$. Donc $F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln|u|\big] = -\ln|u| + c = -\ln|\cos t| + c$.

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) \, dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x) \, dx = -\int \frac{1}{x} \, dx = -\ln|x| + c \, .$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.

En inversant les formules de dérivation des fonctions composées, on aura le tableau suivant (Attention, ces formules sont à comprendre sur des intervalles où les fonctions sont bien définies).

f	primitive F
$f(x) = u'(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}u(ax+b) + c, \quad a \neq 0$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + c$
$f(x) = u'(x) \times (u(x))^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^n} = u'(x)(u(x))^{-n}, \ n \geqslant 2$ entier	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}} + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = u'(x)(u(x)^{-\frac{1}{2}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$
$f(x) = u'(x)u(x)^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln|u(x)| + c$
$f(x) = u'(x)\sin(u(x))$	$F(x) = -\cos(u(x)) + c$
$f(x) = u'(x)\cos(u(x))$	$F(x) = \sin(u(x)) + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$F(x) = \arctan u(x) + c$
$f(x) = u'(x)v'(u(x))$	$F(x) = v(u(x)) = v \circ u(x)$

Remarque

Toute les formules qui précédent ne sont que des cas particuliers de la dernière ligne : une primitive de $x \mapsto f(x) = u'(x)v'(u(x))$ est $x \mapsto F(x) = v(u(x)) = v \circ u(x)$.

4.4.3 Intégration des fractions rationnelles

On souhaite calculer les primitives des fractions rationnelles

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$$

avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Nous commençons par une remarque : avec le cas précédent nous pourrons aussi calculer les primitives des fractions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2. En effet si P est une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2, il existe toujours deux fonctions polynomiales P_1 et Q_1, avec P_1 de degré inférieure ou égale à 1 telles que $\frac{P(x)}{Q(x)} = Q_1(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$. On les obtient par division euclidienne, c'est-à-dire en cherchant à éliminer successivement les puissances de x en partant de la plus grande.

Premier cas.

Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x)$ s'écrit aussi

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

et il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

On a donc

$$\int f(x)\, dx = A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c$$

sur chacun des intervalles ouverts $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$ (si $x_1 < x_2$).

Remarque

Pour démontrer l'existence de deux réels A et B tels que $\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.

On réduit au même dénominateur et l'égalité des numérateurs nous donne

$$\alpha x + \beta = aA(x - x_2) + aB(x - x_1) = (aA + aB)x + (-x_2 aA - x_1 aB).$$

On doit résoudre le système d'inconnues A et B

$$\begin{cases} aA + aB = \alpha \\ -ax_2 A - ax_1 B = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a \\ -ax_2 & -ax_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est $a^2(-x_1 + x_2) \neq 0$, la solution existe et est unique.

Deuxième cas.

Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_0)^2} = \frac{\alpha(x - x_0) + \alpha x_0 + \beta}{a(x - x_0)^2}$$

et il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}.$$

On a ici $A = \frac{\alpha x_0 + \beta}{a}$ et $B = \frac{\alpha}{a}$, il est inutile de retenir par coeur ces valeurs, seulement la méthode.

On a alors

$$\int f(x)\, dx = -\frac{A}{x - x_0} + B \ln|x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$.

Troisième cas.

Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple.

Exemple 4.95

Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$. Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (dont on connaît une primitive, qui est $\ln |u|$).

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

On connaît une primitive de $x \mapsto \frac{4x+1}{2x^2+x+1}$:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln \left|2x^2+x+1\right| + c$$

Occupons nous de l'autre partie $\frac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2 + 1} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1}$$

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$ (et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$) pour trouver

$$\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1} = \frac{8}{7} \int \frac{\sqrt{7}}{4} \frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c\,.$$

Finalement :

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4} \ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c.$$

Remarque

Cette démarche sera toujours possible. Nous allons détailler le cas général pour $\alpha \neq 0$ mais il est conseillé de d'abord le suivre pas à pas avec des valeurs numériques (par exemple celles de l'exemple introductif).

$f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

$$\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{2a} \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{\beta - \frac{b\alpha}{2a}}{ax^2+bx+c}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ est de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = ax^2+bx+c$, elle a pour primitive $x \mapsto \ln|ax^2+bx+c| + c$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ va donner une primitive faisant intervenir la fonction arctan.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x+\tfrac{b}{2a})^2 + (c - \tfrac{b^2}{4a}) = a(x+\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{-\Delta}{4a} \\ &= \tfrac{-\Delta}{4a}\left(\tfrac{4a^2}{-\Delta}(x+\tfrac{b}{2a})^2 + 1\right) = \tfrac{-\Delta}{4a}\left((\tfrac{4a}{\sqrt{-\Delta}}(x+\tfrac{b}{2a}))^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Puis avec le changement de variable $t = \frac{4a}{\sqrt{-\Delta}}(x + \frac{b}{2a})$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \arctan(\frac{4a}{\sqrt{-\Delta}}(x + \frac{b}{2a})) + c$.