ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013 /2014
Devoir surveillé

Épreuve : MOSE1003
Date : 6 Novembre 2013
Heure : 14h00 *Durée :* 1h30
Épreuve des enseignants de SVTE
La "calculatrice Bordeaux 1" est autorisée

Tous Documents Interdits

Question 1 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Lequel des produits matriciels $A \times B$ et $B \times A$ est bien défini ? Le calculer.

Question 2 Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer l'inverse M^{-1} de M.

Question 3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caracteristique $p(x) = \det(A - x\mathrm{I}_2)$.
b) Déterminer les valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.
c) En déduire une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = D$ est une matrice diagonale. Expliciter la matrice D sans calculs.

Question 4 Dériver les trois fonctions f, g, h définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sin(x) + \sqrt{x} \qquad g(x) = \sin(\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}\sin(x)$$

puis déterminer

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Question 5

a) Donner la formule d'intégration par parties.
b) Calculer $\int_1^2 x\ln(x)\,dx$ en effectuant une intégration par parties.

Question 6 On considère la fonction f, définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \cos(x).$$

a) Calculer les dérivés f' et f'' sur $\mathbb{R}_+$.
b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au poit $x_0 = 0$ par la formule de Taylor-Young.

FIN

Q1) le produit $A \times B$ est bien défini

car A est 3×3 et B est 3×1.

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & -3 \\ \hline -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & -11 \\ -1 & 0 & 5 & -16 \end{array}$$

donc $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix}$

Q2)

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 1 & -2 & L_2 - 2L_3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 2 & L_1 + 2L_3 \\ \hline 1 & 0 & -5 & -2 & 0 & -3 & L_1 - 2L_3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 2 & L_3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 & 4 & L_2 + 3L_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & L_1 + L_3 \\ 0 & -5 & 0 & -7 & -4 & -6 & 5L_2 - 4L_3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 & 4 & L_3 \\ \hline \end{array}$$

donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7/5 & 4/5 & 6/5 \\ 3/5 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$.

Q3) $p(x) = \det \begin{vmatrix} -2-x & 4 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (-2-x)(1-x) - 4$

$= x^2 + x - 6$

$= (x-2)(x+3)$ $\quad (\Delta = 25!)$

$\underline{\lambda_1 = 2}$.

$$\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -3$:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 0 \end{array} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, le choix $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

donne $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Q4) $f'(x) = \cos(x) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = \dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot\cos(x)$

On observe que $\displaystyle\int_0^{(\pi/2)^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{(\pi/2)^2} g'(x)\,dx$

$$= g\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2\right) - g(0) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(0)$$
$$= 1.$$

Q5) a) $\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \underbrace{x}_{u'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{v}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2x}\,dx$

$$= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= 2\ln(2) - 3/4.$$

Q6 a) $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} - \sin(x)$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} - \cos(x)$

b) $f(x) = f(0) + x\cdot f'(0) + \dfrac{x^2}{2} f''(0) + x^2\cdot\varepsilon(x) = 2 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\cdot\varepsilon(x)$ $\boxtimes$