université de BORDEAUX

ANNEE UNIVERSITAIRE 2013 / 2014
DST D'AUTOMNE

Licence 1, M0SE1003, mathématiques
Date : 5 Novembre 2014 Durée : 1h30
Documents : non autorisés

Collège Sciences et technologies

---

**Question 1** Calculer, si elle existe, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Question 2** Le but de cet exercice est d'étudier la diagonalisation de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire le polynôme caractéristique de $A$, $p_A(x) = \det(A - xI_2)$.
b) Vérifier que les valeurs propres de $A$ sont $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{1, 2\}$.
c) Trouver un vecteur propre $v_{\lambda_1}$ de valeur propre $\lambda_1$
(Rappel : c'est une solution non nulle de $(A - \lambda_1 I_2)X = 0$).
d) Trouver un vecteur propre $v_{\lambda_2}$ de valeur propre $\lambda_2$.
e) Donner une matrice $P$ telle que $P^{-1}AP =: \Delta$ soit une matrice diagonale. Expliciter la matrice $\Delta$ (sans justifications). Donner l'inverse $P^{-1}$ de $P$.

**Question 3**

a) Donner la formule d'intégration par parties, puis calculer

$$\int_1^2 1 \cdot \ln(x)\,dx.$$

b) Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction

$$f(x) = \sin(1 + x^2)$$

c) En déduire

$$\int_0^1 x\,\cos(1 + x^2)\,dx$$

d) En effectuant un changement de variable $\sin(x) = u$, calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^{3/2}}\,dx$$

**Question 4** Soit $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$.

a) Déterminer le développement de Taylor (-Young) d'ordre 2 de $f$ au point $x_0 = 0$.
b) Déduire la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1 - x}{x^2}$$

FIN.

**Ex1:**

$$
\begin{array}{ccc|ccc|l}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & L_1+L_3 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & L_1+L_2 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & L'_2+L'_3-2L'_1 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & L'_2 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & L'_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Donc $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Ex2.** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

a) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+1)+6 = \lambda^2-3\lambda+2$

b) $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$ donc racines $\{1, 2\}$

c) Calculons $\ker(A-\lambda_1 I)$, càd les sol. de

$(A-\lambda_1 I)\, v_1 = 0$ :

$$
\begin{array}{cc|c|l}
-2 & -1 & 0 & \\
6 & 3 & 0 & \\
\hline
2 & 1 & 0 & -L_1 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 3L_1+L_2
\end{array}
$$

$\Rightarrow v_1 = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Par ex. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) Pareil:

$$
\begin{array}{cc|c|l}
-3 & -1 & 0 & \\
6 & 2 & 0 & \\
\hline
3 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 2L_1+L_2
\end{array}
$$

$\rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $P = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (cours)

$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Q3: a) $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

Ici, $\begin{cases} u'(x) = 1 & u(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$.

Ainsi, $\int_1^2 \ln x = [\ln(x) - x]_1^2 = \ln(2) - 1$.

b) $f(x) = \sin(1+x^2)$ , $f'(x) = 2x \cdot \cos(1+x^2)$

c) Ainsi, $\int_0^1 x \cos(1+x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot \cos(1+x^2)\, dx$

$= \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) = \frac{1}{2}(\sin(2) - \sin(1))$.

d) $u = \sin(x)$ $du = \cos(x)\, dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^{3/2}}\, dx = \int_0^1 \frac{du}{(1+u)^{3/2}} = \left[-2(1+u)^{-\frac{1}{2}}\right]_{u=0}^{u=1}$

$= 2(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Q4: a) $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \cancel{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{3}{2}}$

$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 \cdot \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ si $x \to 0$.

Ainsi, $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 \cdot \varepsilon(x)$

b) $\frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + x^2 \cdot \varepsilon(x) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2}$

$= -\frac{1}{2} + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{2}$.

La limite est donc $-\frac{1}{2}$. //

FIN.