université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	ANNEE UNIVERSITAIRE 2015/2016 SESSION DE PRINTEMPS CODE UE : M1MI2011 (Analyse 1) Devoir surveillé terminal. Date : 13/05/2016 Heure : 14h00 Durée : 3h00 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

EXERCICE 1. **[4 points]**

(1) Rappeler les définitions d'une fonction «f continue en x_0» et d'une fonction « f dérivable en x_0 »

(2) Donner le développement limité de la fonction ln $(1-x)$ à l'ordre 2 en 0 .

(3) Soit la fonction $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\ln\,(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

En utilisant la question (2), montrer que f est une fonction continue sur $]-\infty, 1[$.

(4) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ et calculer $f'(x)$.

(5) En utilisant la question (2), montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

(6) La fonction f' est elle continue en 0 ?

(7) Soit la fonction $h : [0, 1[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$h(x) = \ln\,(1-x) + \frac{x}{1-x}.$$

Calculer $h'(x)$. En déduire que h est strictement croissante et que $h(x) \geq 0$.

(8) En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de son graphe sur $[0, 1[$ (On pensera à calculer la limite de f en 1).

EXERCICE 2. **[3 points]**

(1) Énoncer le théorème de Rolle.

(2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(0) = f(1) = 1$ et $f(0) = 0$. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

(b) Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

(c) Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

EXERCICE 3. **[3 points]**

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Enoncer le Théorème (ou la formule) de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 pour la fonction f.

(2) Montrer que pour tout réel x on a

$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}.$$

EXERCICE 4. **[5 points]** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

(1) Rappeler la définition d'une suite convergente.

(2) (a) Calculer la dérivée de la fonction $\ln\,(x+\sqrt{1+x^2})$ et en déduire la valeur u_0.

(b) Calculer la dérivée de la fonction $\sqrt{1+x^2}$ et en déduire la valeur de u_1.

(c) Montrer que $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ pour $x \in [0,1]$ et calculer $\int_0^1 x^n dx$ pour $n \geq 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

(3) On note maintenant

$$v_n = u_{n+2}+u_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que

$$v_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(4) (a) En intégrant v_n par parties, montrer que

$$(n+2)u_{n+2}+(n+1)u_n = \sqrt{2}.$$

(b) En revenant à la définition de u_n, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Déduire de 4a et 4b que $(2n+3)u_{n+2} \leq \sqrt{2}$.

(d) En utilisant 2c et 4c que , montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 5. [**4 points**] Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x\,\ln\,(1-x^2)}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}$.

EXERCICE 6. [**4 points**] En interprétant les suites ci-dessous comme des sommes de Riemann, calculer les limites suivantes : :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$.

(2) Soit

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha n}{n^2+(\alpha k)^2}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Calculer d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1)$, ensuite calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminer α telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\alpha) = 1$.