	ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017 SESSION DE PRINTEMPS CODE UE : 4TPM209U Analyse Devoir surveillé terminal. Date : 16/05/2016 Heure : 14h30 Durée : 3h00 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. (Questions du cours)

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Énoncer le théorème des accroissement finis.
3. Donner les développements limités d'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes :

$$e^x, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \ln(1+x), \quad \sin(x), \quad \cos(x).$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{e^x-1-x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x+2\ln(1-x)}{x^3}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - 2.$$

1. On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

1.1. Dresser la tableau de variation de φ sur $\mathbb{R}$ (on pensera à calculer les limites en $\pm\infty$).

1.2. En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ a exactement deux solutions qu'on notera α_1 et α_2 avec $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. (On ne cherchera pas à calculer de façon explicite).

1.3. Monter que $\alpha_2 < 2$.

2. Dresser la tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on pensera à calculer les limites en $\pm\infty$).

3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.1. Calculer u_1 et montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

3.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq \alpha_1$.

3.3. En déduire qua la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et determiner sa limite.

Exercice 4.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiares.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(0) = f'(1) = 0$. On définit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-1}{x-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[, \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

2.1. Montrer que la fonction g est continue.

2.2. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$\frac{f(c)}{c} = \frac{f(c)-1}{c-1}.$$

2.3. En déduire que $f(c) = c$.

2.4. En déduire qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}c\right)\right)^2 = c$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \cos(2x) + \sin(x) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

1. Donner les développements limités de $\cos(2x) + \sin(x)$ et de $\dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + x$ à l'ordre 4 au point 0.

2. Montrer que la fonction f est continue.

3. Montre que f est derivable et f' est continue.

4. Donner l'équation de la tangente à l'origine et étudier la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes, en exprimant l'expression dont on prend la limite comme une somme de Riemann :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2k}{n}}$.

2. Soit $\alpha > 0$, on pose

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+\alpha k)^2}.$$

Calculer d'abord $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(1)$ et ensuite calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.