université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019 SESSION DE PRINTEMPS CODE UE : 4TPM209 Analyse Devoir surveillé terminal Date : 15/05/2019 Heure 14h30 Durée : 3h00 Eléments de correction.	Collège Sciences & Technologies

Questions et démonstration de cours. [20 points]

(1) Donner la définition de suite de Cauchy.

(2) Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

(3) Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, on suppose qu'elle admet un maximum en $c \in]a, b[$. On sait qu'alors $f'(c) = 0$, donner la démonstration de ce résultat.

Exercice 1. [35 points]

Soient la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) Montrer que $f([\frac{3}{2}, 2]) \subset [\frac{3}{2}, 2]$.

La fonction f est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ donc $f([\frac{3}{2}, 2]) = [f(2), f(\frac{3}{2})]$. $f(2) = \frac{3}{2}$ et $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{3} \leq 2$ d'où le résultat.

Une erreur souvent vue : il ne suffit pas de vérifier que $f(\frac{3}{2}) \in [\frac{3}{2}, 2]$ et que $f(2) \in [\frac{3}{2}, 2]$ pour en déduire que $f([\frac{3}{2}, 2]) \subset [\frac{3}{2}, 2]$ si on n'a pas montré au préalable que la fonction f est monotone. Pensez par exemple à $g(x) = (x - \frac{3}{2})(x - 2)$, on a $g(\frac{3}{2}) = g(2) = 0$ et pourtant $g([\frac{3}{2}, 2])$ n'est pas inclus dans l'ensemble $\{0\}$.

De plus on rappelle que la seule décroissance de f ne permet pas d'avoir $f([\frac{3}{2}, 2]) = [f(2), f(\frac{3}{2})]$ (il pourrait y avoir des "trous"), c'est la continuité qui permet de dire que l'on a l'intervalle $[f(2), f(\frac{3}{2})]$ en entier.

(2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[\frac{3}{2}, 2]$. On note α cette solution.

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, 2], \quad f(x) = x \Leftrightarrow x + 1 = x^2$$

et l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a pour solutions réelles $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1+\sqrt{4}}{2} \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$.

On en déduit que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[\frac{3}{2}, 2]$ qui est $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Une erreur souvent vue : le théorème des valeurs intermédiaires permet de justifier (sous certaines hypothèses) de l'existence d'au moins une solution de l'équation $f(x) = c$ avec c une constante. Ici on veut résoudre $f(x) = x$, pour se ramener au cas précédent il

faut considérer la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ et on cherche à résoudre $g(x) = 0$. On pouvait alors terminer en remarquant que g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$, $g(\frac{3}{2}) > 0$ et $g(2) < 0$ donc $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\frac{3}{2}, 2]$ (la continuité avec le TVI donne l'existence, la stricte monotonie donne l'unicité).
La résolution directe comme fait ci-dessus est bien sûr valable aussi.

(3) Montrer que
$$\forall x \in [\frac{3}{2}, 2], \quad \forall y \in [\frac{3}{2}, 2], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|.$$
f est continue sur $[\frac{3}{2}, 2]$ et dérivable sur $]\frac{3}{2}, 2[$. De plus
$$\forall x \in]\frac{3}{2}, 2[, \quad |f'(x)| = |-\frac{1}{x^2}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$
On conclut avec l'inégalité des accroissements finis.
Remarque : on pouvait aussi faire directement le calcul suivant
$$|f(x) - f(y)| = |\frac{y - x}{xy}| = \frac{1}{|xy|}|x - y|$$
puis minorer $|xy|$ lorsque x et y sont dans $[\frac{3}{2}, 2]$.
Une erreur souvent vue : ce n'est pas le fait que $-\frac{1}{x^2}$ soit inférieur à $\frac{4}{9}$ qui permet d'en déduire que $|-\frac{1}{x^2}| \leq \frac{4}{9}$. On rappelle que $|X| \leq M \Leftrightarrow -M \leq X \leq M$. Si on travaillait avec $-\frac{1}{x^2}$ qui est clairement négatif, il fallait donc le minorer pour $x \in [\frac{3}{2}, 2]$. Ou plus simplement remarquer que $|-\frac{1}{x^2}| = \frac{1}{x^2}$ puis majorer $\frac{1}{x^2}$ pour $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.

(4) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |2 - \alpha|.$$
On commence par remarquer qu'avec le (1) et $u_0 = 2$ on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |2 - \alpha|$. On démontre le résultat souhaité par récurrence :
$P(0)$ est vraie car $|u_0 - \alpha| = |2 - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^0 |2 - \alpha|$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. En utilisant que $f(\alpha) = \alpha$, et en appliquant l'inégalité (3) à u_n et α éléments de $[\frac{3}{2}, 2]$, on a
$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n |2 - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} |2 - \alpha|.$$
$P(n+1)$ est vraie.
$P(0)$ est vraie, pour tout entier $n \geq 0$, $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ est vraie donc $P(n)$ vraie pour tout entier n.

(5) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
$0 \leq \frac{4}{9} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$. La suite $(u_n)_n$ converge et sa limite est $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2. [50 points]

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(1) Vérifier que g est une fonction paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{-x} = g(x)$ et on a toujours $g(-0) = g(0)$.

(2) Donner la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 3 en 0, de la fonction $x \mapsto e^x - e^{-x}$.

Notons f cette fonction. f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}^4$. Calculons les dérivées successives de f

$f'(t) = e^t + e^{-t}$, $f^{(2)}(t) = e^t - e^{-t} = f(t)$ donc $f^{(3)}(t) = f'(t)$ et $f^{(4)}(t) = f(t)$.

Avec la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 3 en 0, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe c entre 0 et x tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4.$$

Soit ici, il existe c entre 0 et x tel que

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{e^c - e^{-c}}{4!}x^4.$$

(3) Montrer que g est continue en 0 et dérivable en 0, calculer $g'(0)$. (Indication : on pourra utiliser la question (2) ou le montrer directement)

En reprenant les notations de la question précédente, puisque c est entre 0 et x, $\lim_{x \to 0} c = 0$ et $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3}x + \frac{e^c - e^{-c}}{4!}x^2 \right) = 0$. En divisant par $x \neq 0$ on a donc

$$g(x) = 2 + x\left(\frac{1}{3}x + \frac{e^c - e^{-c}}{4!}x^2 \right) = 2 + x\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

C'est encore vrai pour $x = 0$ car $g(0) = 2$. On obtient que g admet un développement limité d'ordre 1 en 0. D'après un résultat du cours, cela implique que g est continue en 0 et dérivable en 0 (c'est même une équivalence) et de plus ici $g'(0) = 0$ car le coefficient de x est nul.

Si la question (2) n'a pas été traitée on peut aussi trouver le résultat demandé en utilisant directement des développements limités.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

dont on déduit pour $x \neq 0$,

$$g(x) = 2 + x\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On peut terminer comme précédemment. Ou si on a oublié ce résultat, en déduire que $\lim_{x \to 0} g(x) = 2$ donc g est continue en 0 ; puis pour $x \neq 0$, $\dfrac{g(x) - 2}{x} = \varepsilon(x)$, le taux d'accroissement de g en 0 a pour limite 0 donc g dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

(4) Quelle est la position de la courbe représentative de g par rapport à la parabole d'équation $y = 2 + \dfrac{x^2}{3}$? Commencer l'étude avec $x > 0$. (Indication : on pourra utiliser la question (2))

On commence par remarquer que la courbe représentative de g et la parabole coïncident au point d'abscisse 0 (elles sont même tangentes). Avec la question (2) pour tout $x \neq 0$, il existe c entre 0 et x tel que

$$g(x) = 2 + \frac{x^2}{3} + \frac{e^c - e^{-c}}{4!}x^3.$$

c étant entre 0 et x, on a pour $x > 0$, $c > 0$ et donc $\frac{e^c - e^{-c}}{4!}x^3 > 0$. La courbe est au dessus de la parabole pour $x > 0$. Pour $x < 0$, on utilise que la fonction g est paire ainsi que la fonction $x \mapsto 2 + \frac{x^2}{3}$, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et par conséquent la courbe représentative de g est au dessus de la parabole.

Une étude directe pour $x > 0$ peut consister à remarquer que le signe de $g(x) - (2 + \frac{x^2}{3})$ est celui de $e^x - e^{-x} - 2x - \frac{x^3}{3}$. Puis de faire l'étude des variations de la fonction $x \mapsto e^x - e^{-x} - 2x - \frac{x^3}{3}$ sur $\mathbb{R}_+$ pour déterminer son signe. On est alors conduit à faire plusieurs calculs de dérivées successives et études de signes des dérivées successives (laissé à la charge du lecteur).

(5) Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$.
g est dérivable comme somme et quotient de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = \frac{x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}}{x^2}.$$

Une erreur souvent vue : dans la formule de Taylor-Lagrange on a l'existence de c entre 0 et x. c dépend du choix de x et n'est donc pas une constante mais une fonction de x. Par conséquent, il est faux de dire que g est dérivable car la fonction $x \mapsto 2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{e^c - e^{-c}}{4!}x^3$ est dérivable car on ne sait pas si c est dérivable.

(6) Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}$. Montrer que pour tout $x > 0$ $h(x) > 0$.
h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = (x - 1 + 1)e^x + (-x - 1 + 1)e^{-x} = x(e^x - e^{-x})$. Pour $x > 0$, $x > -x$ et donc $e^x > e^{-x}$; on a bien $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

(7) Déduire des questions précédentes que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
On a vu dans la question (5) que $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ et avec la question (6), $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. g est continue sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc g strictement croissante sur $[0, +\infty[$. g continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $J = [g(0), \lim_{x \to +\infty} g(x)[$.
$g(0) = 2$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$ et par croissance comparée $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $J = [2, +\infty[$.

(8) Justifier que g^{-1} est dérivable en $e - \frac{1}{e}$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'(e - \frac{1}{e})$.
On remarque que $g(1) = e - \frac{1}{e}$ donc $g^{-1}(e - \frac{1}{e}) = 1$. $g'(1) = \frac{2}{e} \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en $e - \frac{1}{e}$ et $\left(g^{-1}\right)'(e - \frac{1}{e}) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{e}{2}$.
Remarque : puisque $g'(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$, g^{-1} est dérivable sur $]2, +\infty[$.

Exercice 3. [20 points]

(1) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in]0, 1[: \quad f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{(n+1)c^n}.$$

Indication : on pourra considérer la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(x) = f(x) - x^{n+1}(f(1) - f(0))$.
h est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, $h(0) = f(0)$ et $h(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) = h(0)$. On en déduit avec le théorème de Rolle qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $h'(c) = 0$. De plus

$$0 = h'(c) = f'(c) - (n+1)c^n(f(1) - f(0)),$$

ce qui équivaut à $f(1) - f(0) = \dfrac{f'(c)}{(n+1)c^n}$ car $c \neq 0$.

(2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists c_n \in]0,1[\quad e^{c_n} = (n+1)(e-1)c_n^n.$$

On applique le résultat précédent à $f = \exp$ qui est bien continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists c_n \in]0,1[: \quad e^1 - e^0 = \frac{e^{c_n}}{(n+1){c_n}^n}$$

soit $e^{c_n} = (n+1)(e-1)c_n^n$.

(3) Justifier que la suite $(c_n)_n$ admet une sous-suite convergente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in]0,1[$. La suite $(c_n)_n$ est bornée, elle admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 4. [40 points]

(1) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1+x^2)}$.
En utilisant le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $t \mapsto \ln(1+t)$,
$x\ln(1+x^2) = x(x^2 + x^2\varepsilon_1(x))$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. On doit faire un développement limité à l'ordre 3 en 0 du numérateur. Toujours avec les développements de référence
$x\cos(x) = x(1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x))$ et $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$ pour $i = 2,3$.

$$\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1+x^2)} = \frac{x - \frac{x^3}{2} - (x - \frac{x^3}{6}) + x^3\varepsilon_4(x)}{x^3 + x^3\varepsilon_1(x)} = \frac{-\frac{1}{3} + \varepsilon_4(x)}{1 + \varepsilon_1(x)}$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$. Conclusion la limite existe en 0 et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1+x^2)} = -\frac{1}{3}$.

(2) (a) Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
Dans cette question et les suivantes, les fonctions $\varepsilon_i(\cdot)$ ont pour limite 0 en 0. Ce ne sera pas indiqué pour chaque développement.
$x \mapsto \sqrt{1+x}$ est indéfiniment dérivable au voisinage 0, en utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_1(x).$$

Le suivant fait partie des DL de référence

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon_2(x).$$

(b) En déduire un développement limité d'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \sqrt{1+t+t^2}$ et de $t \mapsto \dfrac{1}{1+2t}$.
En remplaçant x par $t + t^2$ et en tronquant à l'ordre 2

$$\sqrt{1+t+t^2} = 1 + \frac{1}{2}(t+t^2) - \frac{1}{8}\overline{(t+t^2)^2}^{(2)} + t^2\varepsilon_3(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + t^2\varepsilon_3(t).$$

En remplaçant x par $2t$

$$\frac{1}{1+2t} = 1 - 2t + 4t^2 + t^2\varepsilon_4(t).$$

(c) Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \dfrac{\sqrt{1+t+t^2}}{1+2t}$.

En faisant le produit des deux développements limités à l'ordre 2 et en tronquant à l'ordre 2

$$\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{1+2t} = \overline{(1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2)(1-2t+4t^2)}^{(2)} + t^2\varepsilon_5(t) = 1 - \frac{3}{2}t + \frac{27}{8}t^2 + t^2\varepsilon_5(t).$$

(d) Déduire du résultat précédent que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x^2+x+1}}{x+2}$ admet une asymptote en $+\infty$ et donner une équation de l'asymptote.

$$\forall x > 0, \quad \frac{x\sqrt{x^2+x+1}}{x+2} = x\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{2}{x})} = x\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}.$$

En posant $t = \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} t = 0$ et avec le précédent développement limité en 0

$$\frac{x\sqrt{x^2+x+1}}{x+2} = x\left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{27}{8}(\frac{1}{x})^2 + (\frac{1}{x})^2\varepsilon_5(\frac{1}{x})\right) = x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}\left(\frac{27}{8} + \varepsilon_5(\frac{1}{x})\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x^2+x+1}}{x+2} - (x-\dfrac{3}{2})\right) = 0$, la courbe admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$.

(e) Donner la position de la courbe par rapport à l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\frac{x\sqrt{x^2+x+1}}{x+2} - (x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{x}\left(\frac{27}{8} + \varepsilon_5(\frac{1}{x})\right). \tag{1}$$

On a de plus que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{27}{8} + \varepsilon_5(\dfrac{1}{x})\right) = \dfrac{27}{8} > 0$. On déduit de (1) et de $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{27}{8} + \varepsilon_5(\dfrac{1}{x})\right) > 0$ pour x assez grand, que la courbe est au dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 5. [40 points]

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\cos(2t) = Re\left(e^{i2t}\right) = Re\left((e^{it})^2\right)$. A l'aide de ce rappel, démontrer la formule trigonométrique

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t).$$

$(e^{it})^2 = (\cos(t) + i\sin(t))^2 = \cos^2(t) - \sin^2(t) + 2i\cos(t)\sin(t)$. D'où avec l'égalité des parties réelles

$$\begin{aligned}\cos(2t) &= \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1-\cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1\\ &= (1-\sin^2(t)) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t).\end{aligned}$$

(2) En faisant un changement de variable, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Pour $x \in [0,1]$ on pose $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, f est continue sur $[0,1]$. La fonction sin est $\mathcal{C}^1$ de $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$. Avec le théorème de changement de variable ($x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$)

$$I = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin(t))^2}\cos(t)\,dt.$$

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) \geq 0$ d'où $\sqrt{1-(\sin(t))^2} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ et

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

(3) A quelle aire (en unité d'aire) correspond I ? Comment retrouver la valeur de I sans utiliser de changement de variable ?

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue et positive sur $[0,1]$, I correspond à l'aire (en unité d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction, l'axe des abscisse et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On remarque de plus que

$$\forall x \in [0,1], \quad y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0.$$

Le domaine est un quart de disque unité, son aire est $\frac{\pi}{4}$.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$. Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge vers I.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2(1-\frac{k^2}{n^2})} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}.$$

On reconnait la somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1]$. La suite $(S_n)_n$ converge vers I.

(5) Montrer que l'on a de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

La fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est décroissante sur $[0,1]$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a

$$\forall x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], \quad \sqrt{1-(\frac{k}{n})^2} \leq \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-(\frac{k-1}{n})^2}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\sqrt{1-x^2}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-(\frac{k-1}{n})^2} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{1-(\frac{j}{n})^2}$$

soit avec la relation de Chasles

$$S_n \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \leq S_n + \frac{1}{n}$$

et le résultat demandé.

Remarque : on pouvait aussi minorer et majorer la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ par des fonctions en escaliers dont les intégrales sur $[0,1]$ donnaient respectivement S_n et $S_n + \frac{1}{n}$ puis conclure avec la définition de l'intégrale de Riemann.