bébé-Pitt

Soit $T : l_r \to l_p$ borné, $Te_n = n^{-s} \cdot e_n$ $(n \geq 1)$.

$$x_N = (\underbrace{0, \dots, 0}_{N}, \underbrace{1, \dots, 1}_{N}, 0, \dots)$$

$$\| x_N \|_{l_r} = N^{1/r}, \quad \| T x_N \|_{l_p} = \left(\sum_{N+1}^{2N} n^{-sp} \right)^{1/p}.$$

OR $(2N)^{-sp} \leq n^{-sp} \leq N^{-sp}$,

$$\| T x_N \| \simeq \left(N^{1-sp} \right)^{1/p} = N^{\frac{1}{p} - s}.$$

La bornitude de T implique que

$$N^{\frac{1}{p} - s} \leq C \cdot N^{\frac{1}{r}}, \quad (N \to \infty)$$

donc $\frac{1}{p} - s \leq \frac{1}{r}$ ou $-s \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

En effet, $-s = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ n'est <u>pas</u> possible :

$\left(n^{-1/r} \ln(n)^{1/p} \right)_{n \geq 1} \in l_r$ par série de Bertrand,

mais $n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \cdot n^{-1/r} \ln(n)^{1/p} = n^{-1/p} \ln(n)^{1/p}$

n'est <u>pas</u> dans l_p pour la même raison.

<u>Donc</u> : $-s < \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Pour $\| x \|_{l_r} \leq 1$ on calcule par Hölder :

$$\sum_{M}^{\infty} | n^{-s} x_n |^p \leq \left(\sum_{M}^{\infty} n^{-spq} \right)^{1/q} \underbrace{\left(\sum_{M}^{\infty} |x_n|^r \right)^{1/q^*}}_{\leq 1}$$

et $\qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{(r/p)} = 1 \iff \frac{1}{q} + \frac{p}{r} = 1$

$$\iff q = \frac{r}{r-p}.$$

Ainsi, $\qquad -s \cdot p \cdot q < \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \cdot p \cdot q$

$$= \frac{p-r}{pr} \cdot p \cdot \frac{r}{r-p} = -1.$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-spq}$ conv. d'où

$$\sum_{n=M}^{\infty} n^{-spq} \xrightarrow{M \to \infty} 0.$$

- Ceci implique l'équisommabilité de $T(B_{\ell^r})$!

- La bornitude ponctuelle vient du fait que
  1) $|x_n| \leq \|x\|_{\ell^r} \leq 1$
  2) $n^{-s} \to 0.$ (donc borné)

On conclut par le critère de Fréchet.