Feuille no. 5

Sous-groupes distingués

$\boxed{1}$ Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\mathrm{SL_n}(A) = \{M \in \mathrm{GL}_n(A) \mid \det(M) = 1\}$ où $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \mid M$ et M^{-1} sont à coefficients entiers$\}$ et on admet que tous ces ensembles sont des groupes. Dans la liste suivante, dire si les sous-groupes H sont distingués dans le groupe G.

(i) $H = (\mathbb{Z}, +)$, $G = (\mathbb{R}, +)$.

(ii) $H = \langle (1, 2) \rangle$, $G = \mathcal{S}_3$.

(iii) $H = \langle (1, 2, 3) \rangle$, $G = \mathcal{S}_3$.

(iv) $H = \mathrm{SL_n}(\mathbb{R})$, $G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$.

(v) $H = \mathrm{SL_n}(\mathbb{Z})$, $G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$.

(vi) $H = \mathrm{SL_n}(\mathbb{Z})$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

$\boxed{2}$ Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes.

(i) Soit N un sous-groupe distingué de H. Montrer que $f^{-1}(N)$ est un sous-groupe distingué de G.

(ii) Soit K sous-groupe distingué de G. Le sous-groupe $f(K)$ est-il distingué dans H ?

$\boxed{3}$ Soient G un groupe, g un élément de G et H un sous-groupe de G d'indice fini n.

(i) Démontrer qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $g^k \in H$.

(ii) On suppose de plus que H est distingué dans G. Montrer que $g^n \in H$.

(iii) Donner un exemple avec H non distingué et $k \neq n$.

$\boxed{4}$ On appelle *groupe simple* un groupe G dont les seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et G (on adopte la notation multiplicative : 1 désigne le neutre de G).

Soient G un groupe et N un sous-groupe de G d'indice 2.

(i) Démontrer que N est distingué dans G.

(ii) Soit H un sous-groupe simple de G d'ordre $\geqslant 3$. Prouver que $H \subset N$.

(iii) Soit n un entier > 2. Montrer que si $G = \mathcal{S}_n$, alors $N = \mathcal{A}_n$. (Indication : on pourra utiliser que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.)

$\boxed{5}$ Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On suppose H d'ordre 2. Montrer que H est contenu dans le centre de G.

$\boxed{6}$ Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes finis distingués de G. On suppose $\operatorname{Card} H$ et $\operatorname{Card} K$ premiers entre eux.

(i) Soient $h \in H$ et $k \in K$. Démontrer que

$$hk = kh.$$

(Indication : on pourra commencer par établir que $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$.)

(ii) Construire un morphisme injectif de groupes $H \times K \longrightarrow G$.

$\boxed{7}$ **Sous-groupe dérivé.** Soit G un groupe. On appelle sous-groupe dérivé de G, noté D, le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $Com = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a \in G, b \in G\}$.

(i) Prouver que D est distingué dans G et que G/D est abélien.

(ii) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $D \subset H$ si et seulement si H est distingué dans G et G/H est abélien.

(iii) Soit C le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $E = \{a^2 \mid a \in G\}$. Montrer que C est distingué dans G.

(iv) Montrer que G/C est abélien. (Indication : utiliser l'exercice 9 de la feuille 1.)

(v) En déduire que $D \subset C$.

$\boxed{8}$ **Normalisateur.** Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit le normalisateur de H dans G par

$$N = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

(i) Vérifier que N est un sous-groupe de G contenant H et que H est distingué dans N.

(ii) Soit K un sous-groupe de G contenant H. Démontrer que $K \subset N$ si et seulement si H est distingué dans K.

$\boxed{9}$ Soient m un entier impair > 3 et G un groupe d'ordre $2m$. On admet qu'il existe $g \in G$ d'ordre 2 (théorème de Cauchy).

(i) Prouver que l'application $\sigma : G \longrightarrow G$ qui à x associe gx est une permutation impaire de G.

(ii) En déduire que le groupe G n'est pas simple. (Indication : on pourra d'abord construire un morphisme injectif $G \longrightarrow \mathcal{S}_{2m}$.)