Exercice 1 Soit $G = \{1, 2\}$ avec multiplication mod 3. Est-ce un groupe? Même question pour $G = \{1, 2, 3\}$ avec avec multiplication mod 4 et $G = \{1, 2, 3, 4\}$ avec avec multiplication mod 5.

Exercice 2 Soit $G = \{5, 15, 25, 35\}$ avec multiplication mod 40. Est-ce un groupe? Même question avec $\{1, 3, 5, 7\}$ mod 8.

Exercice 3 Soit $G = \{1, 9, 16, 22, 53, 74, 79, 81, x\}$ avec multiplication mod 91. Trouver x pour que G devienne un groupe.

Exercice 4 Soit G un groupe traduire les notations "multiplicatives" de la loi en notation additive et vice-versa: a^2b^3, $a^{-2}(b^{-1}c)^2$, $(ab^2)^{-3}c^2$. Puis $5a-3b+c$, $2(a-b)+c$.

Exercice 5 Soit G Abélien, et $x, y \in G$. Donner une inverse de $(xy)^n$.

Exercice 6 Soit G un groupe et $x, y \in G$ avec $xy \neq yx$. Montrer que $xyx \neq e$.

Exercice 7 Montrer que G est Abélien si et seulement si $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Exercice 8 Soit G un groupe et $a \neq b$. Montrer que $a^2 \neq b^2$ ou $a^3 \neq b^3$.

Exercice 9 Soit $G = \{3^m 6^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G est un groupe multiplicatif.

Exercice 10 Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que H est un groupe pour la multiplication de matrices.

Exercice 11 Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que $(G, +)$ est un groupe. Soit $H = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : \quad a + b + c + d = x\}$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ s'agit il d'un sous-groupe? (preuve!)

Exercice 12 Soit $H = \{x \in \mathbb{R}^* : x^2 \in \mathbb{Q}\}$. S'agit il d'un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$?

Exercice 13 Soit G un groupe, H un sous-groupe et $g \in G$. Montrer que $H_g =$

$\{g^{-1}hg : \ h \in H\}$ est un sous-groupe.

Exercice 14 Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. S'agit-il d'un sous-groupe de la $GL_2(\mathbb{R})$?

Exercice 15 Quel est le sous-groupe engendré par $1/2$ dans $(\mathbb{Q}, +)$ et dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$?

Exercice 16 Montrer que $(\mathbb{Q}^*, \times)$ n'est pas monogène. S'inspirer de la preuve que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 17 Soit $a \in G$ un élément d'ordre 7. Montrer que $a = g^3$ pour un $g \in G$.

Exercice 18 Soit $a, b, c \in G$, avec $\mathrm{ord}(a) = 6$, $\mathrm{ord}(b) = 7$. Simplifier $(a^4c^{-2}b^4)^{-1}$.

Exercice 19 Soit $a, b \in G$ avec $\mathrm{ord}(a) = 4$, $\mathrm{ord}(b) = 2$. Quel est l'ordre de ab?

Exercice 20 Soit G un groupe et $a, b \in G$. Montrer que si ab est d'ordre fini, alors ba aussi, et $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba)$.

Exercice 21 Soit G un groupe Abélien. Montrer que les éléments d'ordre fini forment un sous-groupe de G.

Exercice 22 Soit $a \in G$ d'ordre n et d un diviseur de n. Quel est l'ordre de a^d?

Exercice 23 Soit G un groupe ayant 8 éléments d'ordre 3. Combien de sous-groupes d'ordre 3 a G?

Exercice 24 Soit $G = (\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}, +)$ et $H = G^\times$ le groupe des éléments multiplicativement inversibles (mod 14). Expliciter H. Lesquelles des classes $\bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\bar{1}$ engendrent H? Soit $G = (\mathbb{Z}/_{20\mathbb{Z}}, +)$ et $H = G^\times$. Est-ce que H est cyclique?

Exercice 25 Soit G Abélien, et $H = \{g \in G : \mathrm{ord}(g) | k\}$ pour $k \geq 2$. Est-ce que H est un sous-groupe?

Exercice 26 Soient p, q premiers. Donner les sous-groupes de $\mathbb{Z}/_{p^2q\mathbb{Z}}$, les organiser dans un graphe par inclusion. Même question pour ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p^n\mathbb{Z}}$, $n \geq 1$.

Exercice 27 Lesquelles des applications ϕ_k sont des homomorphisme?

$\phi_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,$	$\phi_1(x) = \lvert x \rvert$
$\phi_2 : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$	$\phi_2(A) = \det(A)$
$\phi_3 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X](\text{additif})$	$\phi_3(f) = f'$
$\phi_4 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X](\text{additif})$	$\phi_4(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$
$\phi_5 : {}^{\mathbb{Z}}\!/_{12\mathbb{Z}} \to {}^{\mathbb{Z}}\!/_{10\mathbb{Z}}$	$\phi_5(x) = 3x$
$\phi_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$	$\phi_6(x + iy) = x$

Exercice 28 Soit G un sous-groupe d'un groupe dihédral D_n (générateurs r, s avec $sr = r^{-1}s$). Pour $x \in G$ soit $\phi(x) = 1$ si $x = r^k$ pour un k et $\phi(x) = -1$ sinon. Est-ce que ϕ est un homomorphisme de G dans $(\{+1, -1\}, \times)$?

Exercice 29 Donner un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{Z}, +)$ et $(2\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 30 Montrer que $\phi(x) = \sqrt{x}$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}^*_+)$.

Exercice 31 Soit $\phi : G \to H$ un isomorphisme. Montrer que G cyclique implique H cyclique. Montrer que $G = ({}^{\mathbb{Z}}\!/_{8\mathbb{Z}}, +)^\times$ et $H = ({}^{\mathbb{Z}}\!/_{10\mathbb{Z}}, +)^\times$ ne sont pas isomorphes, alors que G est $K = ({}^{\mathbb{Z}}\!/_{12\mathbb{Z}}, +)^\times$ le sont.

Exercice 32 Est-ce que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont isomorphes?

Exercice 33 Soit G un groupe, et $\phi(x) = x^{-1}$. Montrer que ϕ est un automorphisme ssi G est Abélien.

Exercice 34 Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ admet un nombre infini de sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}$.

Exercice 35 Soit G un groupe Abélien fini et sans éléments d'ordre 2. Montrer que $\phi(g) = g^2$ est un automorphisme de G.

Exercice 36 Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des groupes finies. Montrer que $G \sim H$ ssi G isomorphe à H est une relation d'équivalence sur $\mathscr{G}$.

Exercice 37 Soit $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset A_4$. Expliciter les classes à gauche H, $(123)H$, $(132)H$. Combien de classes à gauche de H y a t il dans la S_4 (ne pas les expliciter).

Exercice 38 Soit G un groupe, H un sous-groupe. Montrer $aH = bH$ ssi $a^{-1}b \in H$.

Reformuler en notation additive.

Exercice 39 Soit $H = 3\mathbb{Z}$. Expliciter les classes à gauche de H dans $(\mathbb{Z}, +)$. Comparer $11 + H$, $17 + H$, $-1 + H$ et $23 + H$.

Exercice 40 Soit $a \in G$ un élément d'ordre 15. Quelles sont les classes à gauche de $K = \langle a^5 \rangle$ dans $H = \langle a \rangle$?

Exercice 41 Soit $G = \mathbb{C}^*$ et $H = \{a + ib : a^2 + b^2 = 1\}$. Décrire la classe à gauche $(3 + 4i)H$.

Exercice 42 Soit G un groupe d'ordre 60. Quels ordres de sous-groupes sont possibles?

Exercice 43 Soit G un groupe d'ordre 420, H un sous-groupe de G et K un sous-groupe d'ordre 42 de H. Quelles ordres de H sont possibles?

Exercice 44 Soit G un groupe d'ordre pq avec p, q premier. Montrer que les sous-groupes non-triviaux de G sont cycliques.

Exercice 45 Montrer pour tout $n \geq 2$ que $\phi(n) = \mathrm{card}\left((\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)^\times\right)$ est un nombre pair (indic: considérer $n - 1$).

Exercice 46 Soit G d'ordre n. Soit $n \wedge m = 1$ et $g \in G$ avec $g^m = e$. Montrer que $g = e$.

Exercice 47 Soit G un groupe ayant au moins deux éléments. Supposons que G n'a pas de sous-groupes propres non-triviaux. Montrer que G est fini, et premier. Indic: montrer d'abord que G infini est absurde dans les deux cas "monogène" et "non monogène".

Exercice 48 Soit G un groupe d'ordre 15. Supposons que G ait un seul sous-groupe $\langle a \rangle$ d'ordre 3 et un seul sous-groupe $\langle b \rangle$ d'ordre 5. Montrer que G est cyclique. (indic: que dire de l'ordre de $g \notin \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$?). Généraliser au cas $|G| = pq$ avec p, q premiers.

Exercice 49 Soit $|G| = 8$. Montrer que G possède un élément d'ordre 2.

Exercice 50 Soit G un groupe, avec $|G| \leq 100$, avec des sous-groupes d'ordre 10 et 25. De quel ordre est G?