Actions de groupes.

Exercice 1 Soit X un ensemble. Montrer que

$$\mathrm{Aut}(X) = \{f : X \to X : f \text{ est une application bijective}\}$$

muni de la composition comme loi interne, forme un groupe (les automorphismes de X). Soit G un groupe agissant sur X. Montrer que l'application $\varphi_g : x \mapsto g \cdot x$ appartient à $\mathrm{Aut}(X)$ *(c'est à dire: montrer que φ_g est un bijection sur X).* Soit $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ donné par $\Phi : g \mapsto \varphi_g$. S'agit il d'un (homo)morphisme de groupes?

Exercice 2 Un groupe G agit naturellement sur lui-même.

Exercice 3 Soit P un polygone régulier à n sommets. Quel est le groupe naturel (déjà étudié en cours/TD) qui agit sur P?

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathscr{B}$ l'ensemble des bases de E. Pour $B_1 = \{e_1, ..e_n\} \in \mathscr{B}$ et $B_2 = \{f_1, ..f_n\} \in \mathscr{B}$, soit $\Psi_{B_1,B_2} : E \to E$ défini (comment?) par $\Psi_{B_1,B_2}(e_i) = f_i$. Quelle structure de groupe porte l'ensemble $G = \{\Psi_{B_1,B_2} : B_1, B_2 \in \mathscr{B}\}$? Identifier G.

Exercice 5 Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et $x, y \in X$. Soit $G(x, y) = \{g \in G : g \cdot x = y\}$.

a) S'agit il d'un sous-groupe? Si non, donner une condition sur x, y qui garantit que s'en est un. Quel nom donne-t-on à $H := G(x, x)$ dans le cours?

b) Soit $y \in \mathrm{Orb}(x) := \{g \cdot x : g \in G\}$, disons $g \cdot x = y$ (ceci définit et fixe g pour la suite!). Montrer que $G(x, y)$ n'est rien d'autre que la classe à gauche gH (*double inclusion!*)
   - i) *"$\supseteq$" Calculer $(gh) \cdot (x)$ pour $h \in H$.*
   - ii) *"$\subseteq$": Montrer que $\widetilde{g} \in G(x, y)$ implique $g^{-1}\widetilde{g} \in H$, puis en déduire $\widetilde{g} \in gH$.)*

c) Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des classes à gauche de la forme kH avec $k \in G$, et $f : \mathrm{Orb}(x) \to \mathcal{K}$ défini par $f(k \cdot x) = kH$. Justifier que f est surjective et injective. On suppose maintenant que G est fini; ainsi, $|\mathcal{K}| = |\mathrm{Orb}(x)|$. Appliquer le théorème de Lagrange pour déterminer $|\mathcal{K}|$. Quel résultat du cours retrouvez vous?

Exercice 6

a) Pour chaque groupe/ensemble précisé plus bas, vérifier si l'application donné définit bien une action de groupe G sur $\mathbb{R}^2$. Il peut devenir utile de se servir de la notation $t \cdot (x, y) = (x_t, y_t)$. Avec cette notation, $\mathrm{Orb}(x, y) = \{(x_t, y_t) : t \in G\}$.
   - i) Translation: $G = (\mathbb{R}, +)$, $t \cdot (x, y) := (x + t, y + 2t)$,
   - ii) Rotation: soit $a, b \in \mathbb{R}$, fixés, $G = (\mathbb{R}, +)$, et

$$t \cdot (x, y) := \begin{pmatrix} a\cos(t) & -b\sin(t) \\ b\sin(t) & a\cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Pour quelles valeurs de a, b s'agit il d'une action de groupe?

iii) $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $t \cdot (x, y) = (tx, t^2y)$.
iv) $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y)$.
v) L'action 'naturelle' de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$.
vi) L'action 'naturelle' de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal) sur $\mathbb{R}^2$.

b) Esquisser les orbites de points suivants $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(1,2),(1,4)\}$ pour chaqun des exemples discuté ci-dessus.
c) Donner un exemple d'une action de groupe sur un ensemble X tel que l'application $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ de l'exercice 1 n'est pas injective et un exemple tel que Φ n'est pas surjective.
d) Décrire X/G comme ensemble: trouver $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ qui intersecte tout orbite une et une seule fois.

Exercice 7 Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ le groupe de matrices inversibles A telles que les coefficients de A et de A^{-1} sont entiers. Se convaincre qu'il s'agit bien d'un groupe par rapport à la multiplication matricielle. On considère l'action multiplicative naturelle de G sur $\mathbb{Z}^2$. Soit $x = (1, 0)$. Montrer que son orbite ne contient que des vecteurs (a, b) tel que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

Classes d'équivalence, et quotients: faisons simple.

Les quotients, et les classes d'équivalence sont, en principe, des idées simples: vous connaissez les jours de semaine (pourtant, lundi dernier n'est pas ce lundi!), les mois dans l'année, etc. Quand on dit "Lundi matin nous avons TD" on a formé des classes d'équivalence! Un peu plus mathématique, mais pas trop abstrait (j'espère):

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et U un sous-espace vectoriel de E.

a) Justifier que $x \sim y$ si $x - y \in U$ est une relation d'équivalence. On note $[x]$ la classe d'équivalence de x, et E/U l'ensemble (pour l'instant) des classes d'équivalence. Exemple:
   i) Dessiner les classes d'équivalence de $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ pour $E = \mathbb{R}^2$ et $U = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. "Voyez"-vous que $[x] = x + U := \{x + u : u \in U\}$?
   ii) Expliciter un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^2$ tel que V contient un et un seul élément de chaque classe d'équivalence (réponse non-unique! Il y en a plein).
b) Revenons au cadre général. On pose $[x] + [y] := [x + y]$. Montrer que E/U, muni de cette addition, est un groupe Abélien.
c) Montrer que $\lambda \cdot [x] = [\lambda \cdot x]$ définit une multiplication 'extérieure' par les scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ *(est-ce une action de groupe sur E? si oui, de quel groupe?)*. Appliqué à l'exemple ci-dessus de $\mathbb{R}^2$: soit $x = (1, 2)$. Quel est le représentant de $[x]$ dans V? et de $3[x]$?
d) Montrer que addition et multiplication extérieure sont 'compatible' et que E/U 'est' donc un espace vectoriel. Dans l'exemple, on peut poser $\kappa : V \to E/U$ défini par $\kappa(v) = [v]$. Est-ce un homéomorphise d'espace vectoriel (aka: une application linéaire)? Montrer que κ est bijectif. Quelle interprétation géométrique a κ^{-1}?
e) Généraliser: Si V est un sous-espace de E tel que chaque classe $[x]$ intersecte V dans un seul point, alors $\kappa : V \to E/U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Un espace vectoriel est un groupe additif commutatif *ayant des structures supplémentaires. Enlevons celles-ci dans un premier temps:*

Exercice 9 Soit G un groupe Abélien, et H un sous-groupe.

a) Justifier que $x \sim y$ si $x^{-1}y \in H$ est une relation d'équivalence *(remarquer la notation multiplicative et comparer avec la notation additive pour des espaces vectoriels).*

b) On note $[x]$ la classe d'équivalence de x. Montrer que $[x] = xH$ (double inclusion!). *Comparer avec l'exercice précédent et sa notation additive.*

c) On note G/H l'ensemble des classes d'équivalences. On pose $[x] \cdot [y] = [xy]$. Montrer que c'est une loi interne de G/H et que G/H muni de cette loi est un groupe, le groupe quotient.

Exercice 10 Si on veut travailler sur un groupe non-Abélien, il y a un problème. Mais où? Refaire les étapes de l'exercice précédent sans commutation, pour le trouver.

Sous-groupes distingués et quotients

Vous l'avez certainement vu dans la question précédente: la relation d'équivalence n'a pas "besoin" de commutation. Mais $(xH)(yH) = (xy)H$ n'est pas clair sans commutation. En effet, c'est faux en général.

Exercice 11 Donner un sous-groupe H du groupe S_3 tel que $(1\,2)H \neq H(1\,2)$.

Reprenons le fil de notre discussion. Pour assurer $(xH)(yH) = (xy)H$, pour tout x, y, la commutation $gH = Hg$ pour tout $g \in G$ suffit amplement, car dans ce cas $(xH)(yH) = xHHy = x(Hy) = x(yH) = (xy)H$. On appelle donc H un sous-groupe distingué (ou "normal" ou "invariant"; les deux derniers sont utilisés en Anglais) , si pour tout $g \in G$, $gH = Hg$.

Exercice 12 Montrer que $gH = Hg$ pour tout $g \in G$ si et seulement si $gHg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$. Attention: on ne peut pas simplement multiplier avec g^{-1}!

Souvent on écrit N (comme normal*) pour des sous-groupes distingués / normaux. Pour ancrer le "double vocabulaire", j'écris normal ou distingué en alternance.*

Exercice 13 Soit N un sous-groupe normal de G. Soit $x \in G$. Montrer que dans G/N la classe la classe $[x]$ n'est autre que xN. En déduire que $|G/N| = G : N$.

Exercice 14 Soit H un sous-groupe de G et $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Montrer que N est distingué.

Exercice 15 Soient N, M deux sous-groupes normaux de G tel que $N \cap M = \{e\}$. Montrer que $nm = mn$ pour tout $n \in N, m \in M$ *(mettre les 4 éléments sur un coté et jouer avec les parenthèses).*

Exercice 16 Soit N un sous-groupe distingué de G et H un sous-groupe de G. Montrer que NH est un sous-groupe de G. *Indication: Utiliser le critère de sous-groupes: $n_1h_1(n_2h_2)^{-1} = n_1(h_1h_2^{-1}n_2^{-1})$. Écrire la parenthèse sous la forme n_3h_3 et conclure.*

Exercice 17 Soit G un groupe et soient H, K deux sous-groupes normaux de G.

a) Montrer que $N := H \cap K$ est un sous-groupe distingué.

b) Soit

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lll} G/N & \to & G/H \times G/K \\ gN & \mapsto & (gH, gK) \end{array} \right.$$

est bien défini, puis qu'il s'agit d'un (homo)morphisme injectif.

c) Montrer que si G/H et G/K sont Abéliens, alors G/N est Abélien.

Exercice 18 Soit G un groupe et H un sous-groupe, et x, y des éléments de G.

a) Montrer que $x \notin H$ implique $xH \neq H$.

b) Montrer que $xyH \neq H$ implique $yH \neq x^{-1}H$. *Attention! Pas simplement multiplier. Essayez un argument par contraposé à la place.*

c) Supposons désormais que H ait la propriété suivante: pour tout $a, b \in G$, $aH \neq bH$ implique $Ha \neq Hb$. Montrer (par exemple par l'absurde) que pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} \subseteq H$.

Exercice 19 Soit G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est normal. *Indication:* $G = H \cup aH = H \cup Hb$ *avec union disjointe pour certains* a, b.

Exercice 20 Soient N, M deux sous-groupes distingués. Monter que NM est normal.

Exercice 21 Soit G un groupe fini et C un sous-groupe cyclique distingué. Montrer que tout sous-groupe de C est un sous-groupe normal de G.

Exercice 22 Soit $N > 1$ et G un groupe ayant la propriété que $x^N y^N = (xy)^N$ pour tout $x, y \in G$.

a) Montrer que $G^N = \{g^N : g \in G\}$ est un sous-groupe normal de G.

b) Montrer que G^{N-1} est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 23 Soit G un groupe, H un sous-groupe tel que pour tout $a, b \in G$ il existe un $c \in G$ avec $(Ha)(Hb) = Hc$. Montrer que H est normal (*indication:* $ab \in (Ha)(Hb)$*!*)

Exercice 24 Pour $a, b \in \mathbb{R}$ soit $\tau_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par $\tau_{a,b}(x) := ax + b$.

a) Montrer que $G = \{\tau_{a,b} : a \neq 0, b \in \mathbb{R}\}$ est un groupe muni de la composition comme loi interne.

b) Montrer que $N = \{\tau_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe normal. *Indication: étudier l'application* $\Phi : G \to \mathbb{R}^*$ *donné par* $\Phi(\tau_{a,b}) = a$*; exploiter que* $\mathbb{R}^*$ *est Abélien.*

c) Déduire que $G/N \simeq \mathbb{R}^*$.

Exercice 25 Soit $G = \mathbb{C}^*$ muni de la multiplication complexe et $N = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Monter que N est distingué et montrer $G/N \simeq \mathbb{R}^*_+$. *Indication: considérer* $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\Phi(z) = |z|^2$.