LICENCE ANNÉE 1 **Année 2011-2012**

MOSE 1003

Feuille de TP n^o 4.

Fonctions.

$--$ > function $z = g(t)$, $z = \exp(-t/2) \cdot * \sin(10 * t)$, endfunction
$--$ > g(1)
$--$ > t=linspace(0,4,200);
$--$ > $y = g(t)$;
$--$ > plot(t,y)

Résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$**.**

Résolution de l'équation $y' = y$ avec $y(0) = 1000$ sur l'intervalle $[0, 4]$.
$--$ > function $z = f(t, y)$, $z = y$, endfunction
$--$ > $t0 = 0$; y0=1000; *conditions initiales*
$--$ > t=0:0.1:4 *discrétisation de* $[0, 4]$ *avec un pas de* 0.1
$--$ > y=ode(y0,t0,t,f) *donne les valeurs de* y *aux instants* t.
$--$ > plot(t,y,'red')

Si on estime à $y_0 = 1000$ le nombre de rats à l'instant $t_0 = 0$ dans une ville, $y(t)$ représente le nombre de rats à l'instant t (t est compté en années) dans la ville. Le modèle présenté ci-dessus est celui de *Malthus*. Est-il raisonnable?

Résolution de l'équation $y' = y(1 - y/10000)$ avec $y(0) = 1000$ sur l'intervalle $[0, 6]$.
$--$ > function $z = f(t, y)$, $z = y \cdot *(1 - y/10000)$, endfunction
$--$ > t=0:0.1:6. $t0$ *et* $y0$ *sont déjà définis et inchangés.*
$--$ > y=ode(y0,t0,t,f)
$--$ > plot(t,y) *représentation sur le même graphique*

Faites la résolution de l'équation $y' = y(1 - y/10000)$ avec $y(0) = 50000$ sur l'intervalle $[0, 6]$, en utilisant le même graphique. Même question avec $y(0) = 10000$.

Si comme auparavant $y(t)$ représente le nombre de rats à l'instant t dans la ville, le modèle présenté ici est celui de *Verhulst*. On voit que la population se stabilise autour de 10000 rats, quelque soit le nombre initial de rats. Ce modèle vous parait-il raisonnable?

Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2.

Résolution de $y'' + 0.5y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ sur l'intervalle [0,6].

Cette équation est équivalente à $\begin{pmatrix} \text{y'} \\ \text{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix}$, avec $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix}$. On a donc $Y' = AY$ avec $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

```
--> function z=f(t,Y), z=[0,1;-3,-0.5]*Y, endfunction
--> Y0=[1;0]              t0 et t sont déjà définis.
--> Y=ode(Y0,t0,t,f)      Y est une matrice 2 lignes et 61 colonnes
--> plot(t,Y)             Executer pour voir le résultat.
--> clf
--> y = [1,0] * Y         On extrait la première ligne de Y.
--> plot(t,y)
```

Exercices.

1) a) Reprendre l'exemple précédent : représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle $y'' + 0.5y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ sur l'intervalle [0,25]. On observe un mouvement oscillatoire amorti.

b) Représenter sur le même graphique, avec une couleur différente, la solution de l'équation différentielle $y'' + 0.5y' + 3y = 0,5\sin(5t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ sur l'intervalle [0,25]. On observe un mouvement oscillatoire amorti suivi d'un mouvement périodique (dit stationnaire) de période différente.

Remarque : On peut résoudre cette équation différentielle (cependant les constantes ne sont pas simples à calculer). La solution de l'équation homogène est de la forme $y_h(t) = e^{-0,25t}\big(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\big)$ avec $\omega = \sqrt{11,75}$ (mouvement oscillatoire amorti). La solution particulière est de la forme $y_p(t) = \alpha\cos(5t) + \beta\sin(5t)$ (mouvement périodique stationnaire).

2) Représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle $y'' + y' + 100,25\,y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 10$ sur l'intervalle [0,4]. Comparer la courbe obtenue à celle de la fonction g donnée par $g(t) = \exp(-t/2)\sin(10t)$ étudiée au début.

3) a) Représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle $y' = \big(\sin(t) - 0.1\big)y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0, 40]$.

b) Résoudre l'équation différentielle $y' = \big(\sin(t) - 0.1\big)y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Tracer la courbe de la fonction obtenue (vous devez retrouver le même graphique).