Exercice 5 Pour une fonction continue f sur l'intervalle $[0,1]$ on pose

$$Tf = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx.$$

Montrer que T est une application linéaire de $C([0,1])$ dans $\mathbb{R}$.

a) Soit $X = C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Est-ce que $T : X \to \mathbb{R}$ est borné? Calculez la norme, le cas échéant.

b) Soit $Y = C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx$. Est-ce que $T : Y \to \mathbb{R}$ est borné? Calculez la norme, le cas échéant.

c) Soit $Z = C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Est-ce que $T : Z \to \mathbb{R}$ est borné? Calculez la norme, le cas échéant.

Exercice 6 Soit $X = C^\infty([0,1])$ muni de la norme sup $\|f\| = \max\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$. Soit $T : X \to X$ défini par $Tf = f'$. Est-ce que T est borné sur X (preuve ou contre-exemple)?

Exercice 7 Soit $X = \{(x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_k = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } k \in \mathbb{N}\}$. On munit X de la norme sup, $\|(x_k)\| = \sup_k |x_k|$. Soit $T : X \to X$ défini par

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_0 - x_1,\ x_1 - x_2,\ x_2 - x_3,\ x_3 - x_4, \ldots)$$

a) Montrer que $T \in \mathscr{L}(X)$.

b) Calculer $\|T\|$.

Exercice 8 Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe. Établir une condition nécessaire et suffisante pour que l'application linéaire

$$T_\lambda : \begin{cases} \ell_1 & \to \ \ell_1 \\ (x_n) & \mapsto \ (\lambda_n x_n) \end{cases}$$

soit bornée. Donner la norme de T_λ en fonction de $\lambda = (\lambda_n)$.

Les exercices seront controllés le vendredi 22. Septembre.