Exercice 9 Rappeler la transformation de Fourier de $\exp(-a|x|)$, $a > 0$. S'en servir pour trouver une fonction f telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-|y|}\,dy = 2e^{-|x|} - e^{-2|x|}$$

Exercice 10

a) Soit $f(x) = 1$ pour $x \in [-1, 1]$ et $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$. Calculer la transformation de Fourier de f.

b) Apres avoir justifié la convergence de l'intégrale, calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$$

en l'écrivant comme une transformation de Fourier, évalue en un point particulier (et facile à trouver).

Exercice 11 Soit f telle que $\mathcal{F}f(\xi) = 1/(1 + |\xi|^3)$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} |(f * f')(x)|^2\,dx$.

Exercice 12 (extrait d'annales 2007) Soit $c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to-\infty} u_n = 0$. Soit $f \in L^1([0, 2\pi], dx)$ (où dx désigne la mesure de Lebesgue. Ici les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$) et

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt,\ n \in \mathbb{Z}.$$

a) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{Z}, c_n$ est une forme linéaire continue sur $L^1([0, 2\pi], dx)$. Donner un f_n avec $c_n(f_n)/\|f_n\|_1 = 1/2\pi$. Déduire la norme de c_n.

b) Montrer que si f est de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$ alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$.

c) En déduire que la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$ pour tout $f \in L^1([0, 2\pi], dx)$ (pour le CC la densité de $C^1[0, 2\pi]$) dans $L^1([0, 2\pi], dx)$ est admise).

d) Soit $T : L^1([0, 2\pi], dx) \to c_0(\mathbb{Z})$ l'opérateur défini par

$$T(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu.

Les exercices seront contrôlés le vendredi 29. Septembre.