Exercice 13 Pour $n \in \mathbb{N}$ soit (X_n, d_n) un espace métrique. Montrer que

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \tfrac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$$

définit une distance sur $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ qui engendre la topologie produit $\mathcal{T}$ sur X (se rappeler qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ est formé par les parties $B = \prod_{n\in\mathbb{N}} O_n$ où chaque O_n est un ouvert de X_n et $O_n \neq X_n$ pour au plus un nombre fini d'indices n) : Montrer que chaque $B \in \mathcal{B}$ contient une d-boule et que réciproquement, chaque d-boule contient un $B \in \mathcal{B}$. Conclure.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel et $\|.\|$ et $|||.|||$ deux normes sur E. On note $B_1 = \{x : \|x\| \leq 1\}$ et $B_2 = \{x : |||x||| \leq 1\}$. Montrer l'équivalence de (a) - (e):

a) La norme $\|.\|$ est plus faible que $|||.|||$.
b) Si $f_n \xrightarrow{|||\cdot|||} f$, alors $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$.
c) $\mathrm{Id} : (E, |||.|||) \to (E, \|.\|)$ est un opérateur linéaire borné.
d) Il existe un $c > 0$ tel que $B_2 \subset c \cdot B_1$ (avec la notation $c \cdot A = \{c \cdot a : a \in A\}$).
e) $\inf\{|||x||| : x \in E, \|x\| = 1\} > 0$.

Exercice 15 Soit (X, d) un espace métrique séparable, et $A \subseteq X$. Montrer qu'alors $(A, d_{|A})$ est séparable.

Exercice 16 Soit $x{=}(x_k) \in \ell_2$ une suite fixée et

$$K = \{y{=}(y_k) \in \ell_2 : \ \forall k \in \mathbb{N} \quad |y_k| \leq |x_k|\}.$$

Montrer que K est compact dans ℓ_2.

Attention, le cours de vendredi 6 Octobre est déplacé au Lundi 9 Octobre, 13h30 - 15h30.

Les exercices seront contrôlés le vendredi 13. Octobre.