Exercice 23 Soit $f \in C^1([0,1])$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (p_n) telle que

$$\|f - p_n\|_\infty \to 0 \qquad \text{and} \qquad \|f' - p_n'\|_\infty \to 0$$

Exercice 24 Soit $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Soit $f : \overline{\mathbb{C}_+} \to \mathbb{C}$ une fonction continue satisfaisant $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Montrer qu'il existent une suite de fonctions rationnelles (r_n) en deux variables tel que $(r_n(z, \overline{z}))_{n\geq 1}$ tend vers f sur tout $\mathbb{C}_+$.

Indication: se ramener d'abord au cas $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ en utilisant la transformation de Moebius $\varphi(z) = \frac{1-z}{1+z}$ (Il sera admis d'utiliser le DM en analyse complexe, et d'utiliser que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ est bijective et holomorphe).

Exercice 25 Démontrer le lemme de Dini (voir cours) en utilisant le compacité sequentielle de K.

Exercice 26 Soit $A = \{f \in C^1([0,1]) : \ \int_{(0,1)} |f'(t)|^2 \, dt \leq 1\}$. Est-ce que A est relativement compact dans $X = C([0,1])$? Même question pour $A_0 = \{f \in A : f(0) = 0\}$.

Les exercices seront contrôlés le vendredi 24. Novembre. La liste est à remplir avant le 24.11.2017, 13h00.