Exercice 27 Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet. Indications : Soit (f_n) Cauchy par rapport à la distance d sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe une fonction continue f_α sur $\mathbb{R}$ telle que $D^\alpha f_n \to f_\alpha$ uniformément. Soit $F = f_{(0,..,0)}$.

b) Montrons par récurrence que $f_\alpha = D^\alpha F$. Si $|\alpha| = 1$, il existe un (seul) j tel que $\alpha = (\alpha_k)$ avec $\alpha_k = \delta_{jk}$. Ecrire

$$f_k(x + e\alpha) - f_k(x) = \int_0^t D^\alpha f_k(x + s\alpha)\, ds$$

pour déduire $f_\alpha = D^\alpha F$.

c) On suppose que $f_\alpha = D^\alpha F$ pour tout $|\alpha| \leq k$. Soit $|\beta| = k + 1$. Il existe alors α avec $|\alpha| = k$ et un j tel que $\beta_j > \alpha_j \geq 0$. Soit $e_j = (\delta_{kj})_k$. Montrer

$$(D^\alpha F)(x + te_j) - (D^\alpha F)(x) = f_\alpha(x + te_j) - f_\alpha(x) = \int_0^t g_\beta(x + se_j)\, ds.$$

Conclure la récurrence et montrer $F \in C^\infty$.

d) En écrivant $N_{\alpha,n}(F) \leq N_{\alpha,n}(F - f_k) + N_{\alpha,n}(f_k)$, montrer $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, puis déduire $f_k \to F$ dans la distance d.

Exercice 28 Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^k g(x) \in L_1(\mathbb{R})$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. En déduire que l'espace de Schwartz est invariant sous convolutions de ses éléments.
Ne pas utiliser la transformationd e Fourier!

Dans la suite on cofondera, par abus de notation, une fonction f avec l'application linéaire $\varphi \mapsto \int f\varphi$.

Exercice 29

a) Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Discuter la convergence de la suite donné par $f_n = e^{-n}\varphi(x - n)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

b) Montrer que $e^x \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

c) Qu'en est il pour $g(x) = e^x \cos(e^x)$? Indication: trouver un primitive de g.

Exercice 30 Soit $\eta_k(x) = \frac{2k^3 x}{(1+k^2x^2)^2}$.

a) Calculer la limite simple de la suite de fonctions $(\eta_k)_k$ lorsque $k \to \infty$.

b) Montrer que $\eta_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ pour tout $k \geq 0$.

c) Déterminer la limite η de (η_k) dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Les exercices seront contrôlés le vendredi 8. Décembre. La liste est à remplir avant le 08.12.2017, 13h00.