Exercice 1 Donner un exemple d'un espace vectoriel normé dont la boule d'unité fermé n'est pas compact (avec démonstration bien entendu).

Exercice 2 On considère la partie E de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ donnée par

$$E = \{(x_n) \in \ell_\infty : \exists k \in \mathbb{N} \ |x_k| = \|(x_n)\|_\infty.\}$$

Est-ce que E est fermé ? Est-ce que E est dense ?

Exercice 3 Soit $E = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : \ f(1) = 0\}$ muni de la norme sup. On considère $\phi : E \to \mathbb{R}$,

$$\phi(f) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Montrer $|\phi(f)| < \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E \backslash \{0\}$. Est-ce que ϕ est un opérateur linéaire sur E? Si oui, est-il borné ? Si oui, calculer sa norme !

Exercice 4

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que pour tout $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell_\infty$ on a $(a_n x_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0} \in c_0$.
2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que pour tout $(x_n)_{n\geq 0} \in c_0$ on a $(a_n x_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell_\infty$.

Exercice 5 Soient X, Y des espaces de Banach et $T_n : \ X \to Y$ des opérateurs linéaires bornés. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

1. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de X telle que la série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge, alors $T_n x_n \to 0$ dans Y.
2. $\sup_n \|T_n\| =: M < \infty$.

Indication: on pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.

DEVOIR À RENDRE MARDI 2 NOVEMBRE (OU PAR POSTE AU PLUS TARD LE 30 OCTOBRE, LE CACHET DE POSTE FAISANT FOI). UN CORRIGÉ SERA DISPONIBLE LE 2 NOVEMBRE.