**Exercice 1 (Extrait de l'examen 2007, première session)**
Soit $c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que

$$\lim_{n\to-\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Soit $f \in L^1([0,2\pi], dx)$. Ici, $dx$ désigne la mesure de Lebesgue et les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

le $n$-ième coefficient de Fourier de $f$.

1. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $c_n$ est une forme linéaire continue sur $L^1([0,2\pi], dx)$. Calculer sa norme.

2. Montrer que si $f$ est de classe $C^1$ sur $[0,2\pi]$, alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$.

3. En déduire que la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$ pour tout $f \in L^1([0,2\pi], dx)$.

4. Soit $T : L^1([0,2\pi], dx) \to c_0(\mathbb{Z})$ l'opérateur défini par

$$T(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

   Montrer que $T$ est un opérateur linéaire continu.

5. Quels sont les espaces de départ et d'arrivé de l'adjoint $T'$ de $T$? Donner l'expression de $T'$.

**Exercice 2 (la jauge de Minkowski)**

1. *(une observation banale)* Soit $B$ la boule d'unité d'un espace vectoriel normé (e.v.n) $E$. Montrer que $B$ est ouvert, convexe et contient 0.

2. *(La réponse de Minkowski à une question naturelle)* Soit maintenant $C$ un ouvert convexe d'un e.v.n. réel $E$. On suppose que $0 \in C$. On définit la jauge de Minkowski $p$ de $C$ par

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0, \alpha^{-1}x \in C\}, \quad x \in E.$$

   Montrer les propriétés suivantes:

   (a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall \lambda > 0, x \in E.$
   (b) $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$
   (c) $p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$
   (d) Il existe une constante $M$ telle que $p(x) \le M\|x\|$ pour tout $x \in E$.

   En déduire que $C = B_{\|\cdot\|}(0,1)$ où $\|x\| := p(x)$.

3. *(une belle application)* Soit $E$ un e.v.n et $F$ un sous-espace fermé de $E$. On considère l'application $\iota : F \to E$, $\iota(x) = x$ et on définit $\|x\|_F = \|\iota x\|_E$. Ainsi, $\iota$ est une isométrie et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach (expliciter ceci!). Soit $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_F$ une deuxième norme sur $F$ telle que est $\|\cdot\|_F$ et $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_F$ sont des normes équivalentes.

   Construire une norme $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_E$ sur $E$ qui à la fois

   (a) étend la norme$|\!|\!| \cdot |\!|\!|_F$ (i.e. $|\!|\!| x |\!|\!|_F = |\!|\!| x |\!|\!|_E$ pour tout $x \in F$) et

   (b) est équivalente à la norme $\|\cdot\|_E$.

   Indication: Considérer l'enveloppe convexe de $B_{\|\cdot\|_E}(0,1) \cup \iota(B_{|\!|\!| \cdot |\!|\!|_F}(0,1))$.

**Exercice 3** Soit $A$ une partie fermé d'un espace de Banach $E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction $L$-Lipschitzienne, c'est à dire, une fonction vérifiant

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot \|x - y\|$$

On définit une fonction $F$ sur $E$ par $F(x) = \inf\{f(y) + L\|x - y\| : \ y \in A\}$. Montrer que $F$ est une extension $L$-Lipschitzienne de $f$ sur $E$ entier, c'est à dire que $F$ est $L$-Lipschitzienne et que $F|_A = f$.

Remarque: dans la littérature mathématique on appelle la construction de $F$ la inf-convolution de $f$ avec $g(x) = L \cdot \|x\|$.

**Exercice 4** **(Le théorème de Tietze)**

1. Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $r \in [0, 1[$ tels que pour tout $y \in F$ avec $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq a$ et $\|y - Tx\| \leq r$. Montrer que $T$ est surjective et ouverte.

2. Soit $X$ un espace métrique. Montrer qu'alors toute fonction continue et bornée $f$ à valeurs réelles sur un fermé $Y$ de $X$ se prolonge en une fonction continue bornée $\tilde{f}$ sur $X$ telle que
$$\|\tilde{f}\|_{C_b(X)} = \|f\|_{C_b(Y)} = \sup_{y \in Y} |f(y)|.$$
   Ici, $C_b$ désigne les fonctions continues bornés avec la norme (naturelle) $\|f\| = \sup |f(x)|$.

   Indication: Expliquer d'abord pourquoi on peut supposer sans restriction de la généralité que $\|f\|_\infty = 1$. Considérer ensuite trois fermés $A_i \subseteq E$, pour $i = 1, 2, 3$ qui sont formés des $x$ sur lesquelles $f$ est "petit" (pour $i = 1$), "proche de zéro" (pour $i = 2$) et "grand" (pour $i = 3$) respectivement – les mots "petit", "proche de zéro" et "grand" sont à interpréter dans un sens convenable. Ensuite construire une fonction borné $g$ qui admet son maximum sur $A_1$, et son minimum sur $A_3$ afin que $\|f - g\|_{C_b(Y)} \leq r\|f\| = r$ pour un $r < 1$. Pour trouver $g$, jouer avec $d(x, A_1)$ et $d(x, A_3)$

**Devoir à rendre Mercredi, le 1/12/09.**