Feuille d'exercices n° 2.

Exercice 1 Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet

Exercice 2 Soit E un espace métrique tel que toutes ses boules fermées sont compactes. Montrer que E est complet.

Exercice 3 Montrer que l'image par une application continue d'un espace métrique compact est compact.

Exercice 4

(a) Soit f une application continue et bijective d'un espace métrique compact dans un espace métrique. Montrer que son inverse f^{-1} est continue.

(b) Ce résultat est-il valable sans l'hypothèse de compacité de l'espace ?

Exercice 5

(a) Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini. Montrer que pour tout p avec $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ muni de sa norme habituelle est complet.

Quelques indications: le cas $p < \infty$. Soit (f_k) une suite de Cauchy dans L^p. Quitte à passer à une sous-suite extraite on peut supposer sans restriction que $\|f_{k+1} - f_k\| \leq 2^{-k}$.

(i) On pose $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|$. Montrer que $\| \lim\limits_{n\to\infty} g_n\|_p \leq 1$.

(ii) En déduire que la somme

$$f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{k+1}(x) - f_k(x)\big)$$

converge presque partout.

(iii) Si pour un point x, la somme de (ii) converge on pose $f(x)$ égale à la valeur de la somme. Si la somme ne converge pas, on pose $f(x) = 0$. Montrer que $f(x) = \lim f_k(x)$ pour presque tout x.

(iv) Montrer que $\lim f_k = f$ dans la norme de L^p.

En cas $p = \infty$: On pose

$$A_k = \{x : \ |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \quad \text{et} \quad B_{n,m} = \{x : \ |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

et finalement $E = \bigcup A_k \cup \bigcup B_{n,m}$. Quelle est la mesure de E? Qu'est-ce qui se passe-t-il hors de E? Conclure!

(b) Montrer que $C_0(\mathbb{R}^d)$ et $C(K)$ (où K est un compact de $\mathbb{R}^d$), munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sont complets.

Exercice 6 Montrer que $\mathbb{Q}$ muni de la métrique habituelle n'est pas un espace métrique complet.

Exercice 7 Si K est un compact dénombrable d'un espace métrique M, alors il contient un point isolé, c'est à dire il existe un point $x \in K$ et un rayon $\varepsilon > 0$ tel que $B_M(x, \varepsilon) \cap K = \{x\}$.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si E admet une base algébrique dénombrable alors E n'est pas complet. (Exemple $\mathbb{R}[X]$ avec $\|p\| = \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|$).

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue tel que $\lim_{n\to\infty} f(nt) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Exercice 10* Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un espace de Baire X qui converge simplement vers une fonction f. Montrer que f est continue sur un sous-ensemble dense de X.

Exercice 11** Montrer que l'ensemble des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de $[0, 1]$ est dense dans $C([0, 1])$, muni de la norme uniforme.