Feuille d'exercices n° 3.

Exercice 1 Montrer que toute application linéaire agissant sur un e.v.n. de dimension finie est continue.

Exercice 2 Soit T l'application de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ où $a = (a_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que T est linéaire continue et calculer la norme de T.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.

(a) Démontrer que l'application $\|.\|$ est une norme sur E. Dans les questions suivantes, E est muni de cette norme.

(b) Soit c un réel positif et L l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $L(P) = P(c)$. Démontrer que L est linéaire et continue si et seulement si $c \in [0, 1]$. Calculer la norme de L lorsque L est continue.

(c) L'application $P \to P'$ est elle continue sur E ?

Exercice 4 Soit T l'application de $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(c)$ où c est un réel de l'intervalle $[0, 1]$. E est muni de la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(x)\, dx$. Montrer que T n'est pas continue.

Exercice 5 Soit $E = C([0, \pi], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$. On désigne par φ un élément fixé de E et par T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^\pi f(x)\varphi(x)\, dx.$$

(a) Démontrer que T est linéaire et continue.

(b) Calculer la norme de T lorsque φ est φ est ≥ 0.

(c) Calculer la norme de T lorsque φ est la fonction $x \to \cos x$.

Exercice 6 Soit $E = c_0$ muni de sa norme usuelle et soit $\lambda = (\lambda_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes telle que $\lambda_n \neq 0$ pour tout n. On pose $T_\lambda(a) = (\lambda_n a_n)_n$, $a = (a_n) \in c_0$.

(a) Démontrer que T est une application linéaire continue de c_0 dans lui-même. Déterminer sa norme.

(b) Est-ce que T_λ est injective?

(c) Établir une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que T_λ soit surjective.

Exercice 7 Trouver une suite d'opérateurs bornés (T_n) sur un espace de Banach E tels que $(T_n x)$ converge vers 0 pour tout $x \in E$ et que $\|T_n\| = 1$ pour tout n.

Exercice 8 Soit E un e.v.n. réel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) Il existe $f \in E'$ de norme ≤ 1 telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout i.

(b) $\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n \leq \|\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\|$ pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$E_\alpha = \{f \in C([-1,1]), f(0) = \alpha\}$$

(a) Montrer que E_α est un convexe dense dans $L^2(]-1,1[, dx)$.

(b) Montrer que pour $\alpha \neq \beta$, E_α et E_β sont deux convexes disjoints mais ne peuvent pas être séparés par aucune forme linéaire continue.

Exercice 10 Soit C un ouvert convexe d'un e.v.n. réel E. On suppose que $0 \in C$. On définit la jauge p de C par

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0, \alpha^{-1} x \in C\}, \quad x \in E.$$

Montrer les propriétés suivantes:

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall \lambda > 0, x \in E$.

(b) $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$

(c) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$.

(d) Il existe une constante M telle que $p(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 11 Montrer qu'il existe sur ℓ^∞ une forme linéaire f telle que

$$\liminf_n x_n \leq f(x) \leq \limsup_n x_n$$

pour tout $x = (x_n) \in \ell^\infty$.

Exercice 12 Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant:
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, ayant une infinité de termes distincts et un point d'accumulation. Alors, l'espace engendré par 1 *et* $(x^{a_n})_{n\geq 0}$ *est dense dans* $C([0,1])$*, muni de la norme de la convergence uniforme.*

(a) Montrer que toute forme linéaire continue sur $C([0,1])$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $C([0,1], \mathbb{C})$.

(b) Pour $z \in D = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$, on note x^z la fonction $x \to x^z,\ x \in [0,1]$. Soit

$$F(z) = l(x^z), \quad z \in D,\ l \in (C([0,1]))'.$$

Montrer que F est une fonction holomorphe sur D.

(c) Supposons que l est nulle sur l'espace engendré par 1 et $(x^{a_n})_{n\geq 0}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ l(x^n) = 0$.

(d) En déduire le résultat recherché.