Feuille d'exercices n° 4.

Exercice 1 Soient E et F deux e.v.n. On suppose que E est de dimension finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soient $T, T_n \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que si (T_n) converge fortement vers T, alors elle converge dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Exercice 2 Soient E et F deux e.v.n. et T une application linéaire de E dans F. Supposons e que pour tout $\varphi \in F'$, la forme linéaire $\varphi \circ T$ est continue sur E (i.e. $\varphi \circ T \in E'$). Montrer que T est continue.

Exercice 3 Soit E un espace de Banach.

(a) Soit B une partie de E. Montrer que B est borné si et seulement si pour e tout $f \in E'$, $f(B)$ est borné.

(b) Soit B' une partie de E'. Montrer que B' est borné dans E' si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{f(x) : \ f \in B'\}$ est borné.

(c) Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement. Montrer que (x_n) est borné.

Exercice 4 Soit E un e.v.n. qui est complet pour deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose qu'il existe une constante positive c telle que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$. Montrer que ces deux normes sont équivalentes.

Exercice 5 Soient E et F deux espaces de Banach et soit (T_n) une suite d' éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que $\|T_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$C = \{x \in E : \ (T_n x) \text{ est une suite de Cauchy}\}$$

est un sous-espace fermé de E.

(b) Supposons que $(T_n x)$ est convergente pour tout x dans un ensemble dense. Montrer que (T_n) converge fortement vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Exercice 6 Soit X un espace de Banach et T, T_n, S, $S_n \in \mathcal{L}(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que $T_n \to T$ faiblement si pour tout $x \in X$ et pour tout $x' \in X'$ on a $\langle x', T_n x\rangle \to \langle x', Tx\rangle$ dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'une suite d'opérateurs faiblement convergent est uniformément borné dans $\mathcal{L}(X)$. Est-ce que les assertions suivantes sont vrais ou faux (démonstration ou contre-exemple)?

(a) Si $T_n \to T$ fortement et $S_n \to S$ faiblement, alors $S_n T_n \to ST$ faiblement.

(b) Si $T_n \to T$ faiblement et $S_n \to S$ fortement, alors $S_n T_n \to ST$ faiblement.

(c) Si $T_n \to T$ faiblement et $S_n \to S$ en $\mathcal{L}(X)$, alors $S_n T_n \to ST$ faiblement.

Exercice 7* Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un espace de Baire X qui converge simplement vers une fonction f. Montrer que f est continue sur un sous-ensemble dense de X.

Exercice 8** Montrer que l'ensemble des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $C([0,1])$, muni de la norme uniforme.