Feuille Hahn-Banach
La forme analytique du théorème

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel et $x \in E$. Montrer qu'il existe une fonctionnelle $x' \in E'$ telle que $x'(x) = \|x\|$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel. Montrer que E est de dimension finie si E' est de dimension finie.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel et $x \in E$. Soit δ_x la forme linéaire $E' \to \mathbb{K}$ définie par $\delta_x(x') := x'(x)$.

(a) Montrer que δ_x est un opérateur linéaire borné sur E' donc un élément du *bidual* $E'' = (E')'$.

(b) Montrer que $\iota : E \to E''$, $\iota(x) = \delta_x$ est une isométrie

(c) Est-ce que tout espace vectoriel normé est identifiable avec un sous-espace (dense?, fermé?) vectoriel d'un espace de Banach? Discuter les différentes (im-) possibilités!

Exercice 4 Soient E et F deux e.v.n. et T une application linéaire de E dans F. Supposons e que pour tout $\varphi \in F'$, la forme linéaire $\varphi \circ T$ est continue sur E (i.e. $\varphi \circ T \in E'$). Montrer que T est continue.

Exercice 5 Soit E un espace de Banach.

(a) Soit B une partie de E. Montrer que B est borné si et seulement si pour e tout $f \in E'$, $f(B)$ est borné.

(b) Soit B' une partie de E'. Montrer que B' est borné dans E' si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{f(x) : \ f \in B'\}$ est borné.

(c) Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement. Montrer que (x_n) est borné.

Exercice 6 Soit E un e.v.n. réel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) Il existe $f \in E'$ de norme ≤ 1 telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout i.

(b) $\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n \leq \|\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\|$ pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

(a) Soit U un sous-espace vectoriel fermé d'un e.v.n. E. Montrer que $E/U = \{\bar{x} = x + U \ : x \in E\}$ est un espace vectoriel normé pour la norme.

$$\|\bar{x}\|_{E/U} := \inf\{\|x + u\|_E : \ u \in U\}$$

Montrer que $\kappa : E \to E/U$ définit par $\kappa(x) = \bar{x}$ est une application linéaire et continue. Quel est sa norme ?

(b) Soit U et E comme dans la situation de la question précédente et $x_0 \notin U$. Montrer qu'il existe une fonctionnelle $x' \in E'$ telle que $x'|_U \equiv 0$ et $x'(x_0) \neq 0$.

(c) Déduire le lemme suivant: un sous-espace V d'un espace normé est dense si et seulement la seule fonctionnelle $x' \in E'$ qui s'annule sur tout V (i.e. $x'|_V = 0$) est l'origine $x' = 0$ de E'.

(d) Soit $E = \ell_p$ pour $1 \leq p < \infty$ et (α_n) une suite de c_0 avec $\|(\alpha_n)\|_\infty < 1$. On pose $x_n = (1, \alpha_n, \alpha_n^2, \alpha_n^3, \ldots) \in \ell_p$. Montrer que le sous-espace U engendré par les x_n, $n \geq 1$ est dense.

Exercice 8 Trouver un sous-espace U de dimension 1 de $E = L^1(0,1)$ et une fonctionnelle linéaire ϕ sur U telle que

$$\{x' \in E' \ : \ x'|_U = \phi\}$$

est indénombrable.

Exercice 9 Montrer qu'il existe une forme linéaire f continue sur ℓ^∞ telle que

$$\liminf_n x_n \leq f(x) \leq \limsup_n x_n$$

pour tout $x = (x_n) \in \ell^\infty$.
Indiction: se concentrer d'abord uniquement sur l'estimation 'supérieure'. L'autre inégalité ainsi la continuité en découlent!

Exercice 10

(a) Soit $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $\ell_p' = \ell_q$. En déduire que les espaces ℓ_p pour $1 < p < \infty$ sont réflexifs.

(b) Montrer que $c_0' = \ell_1$ et $\ell_1' = \ell_\infty$.

(c) Montrer à l'aide de l'exercice précédente que c_0 n'est pas réflexif.

Exercice 11 Soit E un e.v.n.. Le but de l'exercice est de montrer le lemme suivant: Si E' est séparable, alors E l'est également.

(a) Montrer que la sphère d'unité $S_{E'}$ est séparable si E' est séparable.

(b) Soit $(x_n')_{n\geq 1}$ une suite dense dans $S_{E'}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans la sphère $\subset S_E$ de E tel que $x_n'(x_n) \geq \frac{1}{2}$.

(c) Soit U l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par la suite (x_n) de la question précédente. Montrer que U est dense.

(d) Est-ce que la séparabilité de E implique la séparabilité de E' (preuve ou contre-exemple)?

Exercice 12 Soit X un espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe des formes linéaires non-continues sur X. Indictaion: Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants dans X, avec $e_n = 1$. Construire une forme linéaire Φ telle que $\Phi(e_n) = n$ pour tout n.)

La forme géométrique du théorème

Exercice 13 Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$E_\alpha = \{f \in C([-1,1]), f(0) = \alpha\}$$

(a) Montrer que E_α est un convexe dense dans $L^2(]-1,1[, dx)$.

(b) Montrer que pour $\alpha \neq \beta$, E_α et E_β sont deux convexes disjoints mais ne peuvent pas être séparés par aucune forme linéaire continue.

Exercice 14 Soit V un convexe fermé de l'e.v.n E. On dit qu'une suite (x_n) converge faiblement vers x (on utilisera la notation $x_n \rightharpoonup x$) si pour tout $x' \in E'$, $x'(x_n - x) \to 0$. Montrer que $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \in V$ pour tout n implique $x \in V$. Déduire le *lemme de Mazur*: Si $x_n \rightharpoonup x$ il existe une suite de combinaisons convexes

$$y_n = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^{(n)} x_i \qquad \text{avec} \quad \lambda_i^{(n)} \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^{(n)} = 1$$

tel que $\|y_n - x\| \to 0$.

Exercice 15 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé.

(a) Pour tout fonctionnel x' on appellera demi-espaces affine un ensemble de la forme $H = \{x \in X : \ x'(x) < c\}$.

Montrer que tout convexe fermé C de X s'écrit comme l'intersection de tous les demi-espaces fermés $\overline{H}$ de X qui contiennent C.

(b) Soient μ une mesure de probabilité sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et C un convexe fermé borné de $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Décrire les formes linéaires sur X. Montrer que pour toute μ-mesurable fonction $f : (\Omega, \mu) \to C$ on ait

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \in C$$

Exercice 16 Soit E un espace vectoriel normé réel et $C \subseteq E$ un convexe fermé. On dit qu'un hyperplan (affine) fermé $H \subseteq E$ est un hyperplan d'appui pour C en un point $a \in \partial C$ si $a \in H$ et si C est entièrement contenu dans l'un des demi-espaces fermés déterminés par H.

(a) Soit $a \in C$. Montrer que C possède un hyperplan d'appui au point a si et seulement si il existe une forme linéaire continue non-nulle : $x' \in E$ telle que $x'(a) \geq x'(z)$ pour tout $z \in C$.

(b) On suppose que C est d'intérieur non-vide dans E.

(i) Montrer que $\overline{\mathring{C}} = C$ (Faire un dessin).

(ii) Montrer que C possède un hyperplan d'appui en tout point $a \in \partial C$ (Séparer a de C).