Corrigé (DS) Analyse

Question 1

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(1, \infty)$, continue et borné

$\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $(0,1)$,

$\int_0^1 f(x)\,dx$ converge (primitive $2\sqrt{x}$, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = 2$)

Question 2

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

$\int_0^1 f(x)\,dx$ existe? oui, car f continue sur $[0,1]$
admet un prolongement continu en $x_0 = 0$ par $f(0) = 1$
Il s'agit d'une intégrale "faussement impropre"

Question 3

$g(x) = \frac{1}{x + e^x}$ $\qquad h(x) = \frac{1}{x - e^{-x}}$ $\qquad x \geq 3$

$g, h \geq 0$
Puis $g(x) \leq \frac{1}{e^x} \Rightarrow \int_3^{+\infty} g(x)\,dx$ converge

$h(x) \geq \frac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable si $[3, \infty)$

$\Rightarrow \int_3^{+\infty} h(x)\,dx$ diverge

Question 4

$S = \sum_1^\infty \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

a) $0 \leq a_n \leq \frac{2}{n^3} \Rightarrow$ conv. par Riemann $(\alpha = 3 > 1)$

b) $\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$

$\forall n : 2 = a(n+1)(n+2) + b\,n(n+2) + c\,n(n+1)$

pour $n=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$

$n=-1 \Rightarrow -b=2 \Rightarrow b=-2$

$n=-2 \Rightarrow +2c=2 \Rightarrow c=1$

Donc $S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$

verifier

par rec. $= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \xrightarrow{N \to \infty} \frac{1}{2}$

$\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \dots$

Rq $\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\Rightarrow S_N = \frac{1}{N(N+1)} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \longrightarrow \frac{1}{2}$

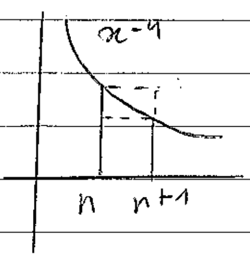
Question 5

$S_N = \sum_{n=1}^{N} n^{-4}$

$0 \leq S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-4} \leq \int_{N+1}^{\infty} x^{-4} = \frac{1}{3}(N+1)^{3}$

conv. pour $N \to \infty$ par Riemann

$n^{-4} \leq \int_{n}^{n+1} x^{-4}$



On veut $\frac{1}{3}(N+1)^{-3} < \frac{-5}{1000} \iff (N+1)^{3} > \frac{1000}{15} = 66{,}6$

Corrigé (DS) Analyse

$3^3 = 27 \quad 4^3 = 64 \quad 5^3 = 125$

$64 \leq 66{,}6 \leq 125$ donc $N = 4$

Question 5 :

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

On observe $a_n \geq 0$ on essaye d'applique Liebniz
on a $a_{n+1} \leq a_n$

$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
$\Leftrightarrow \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$
$\Leftrightarrow n+2 + 2\sqrt{n(n+1)} + n \leq 4(n+1)$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+2$
$\Leftrightarrow 4n(n+1) \leq 4(n+1)^2$ OK

$$0 \leq a_n = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

donc $a_n \searrow$ donc S converge par Leibniz