ANNEE UNIVERSITAIRE 2014 / 2015
DS D'ETE

Licence 2, analyse 3
Date : 12 Mars 2015 Durée : 1h20
Documents : non autorisés

Collège Sciences et technologies

Penser à bien justifier vos réponses.
La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Question 1

a) Donner un exemple d'un intervalle I et d'une fonction continue et bornée sur I, dont l'intégrale sur I n'est pas convergente.

b) Donner un exemple d'un intervalle J d'une fonction continue et non bornée sur J, dont l'intégrale sur J est convergente.

Question 2
Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Est-ce que l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe?

Question 3 Soit $g(x) = \frac{1}{x+e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{x-e^{-x}}$. Est-ce que les intégrales impropres

$$\int_3^\infty g(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_3^\infty h(x)\,dx$$

existent? Justifier vos réponses.

Question 4 On considère la série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

a) Montrer que la série S converge.

b) Décomposer $\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$ pour calculer la valeur de S.

Question 5 On considère $S_N = \sum_{n=1}^{N} n^{-4}$. Justifier que $S := \lim_{N\to+\infty} S_N$ existe. Par une comparaison somme–intégrale, déterminer une valeur N tel que que $0 \leq S - S_N \leq 0.005$.

Question 6 Pour $n \geq 1$, soit $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Discuter la convergence de la série alternée

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

— FIN —