Penser à bien justifier vos réponses.
La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Question 1 Discuter la convergence de $\int_\pi^\infty \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}}\,dx$. Indication: on pourra considérer une intégration par parties sur $[\pi, M]$ pour $M > \pi$.

Question 2 Étudier la convergence des séries numériques de terme général suivants:

$$a_n = \frac{\sinh(n)}{\cosh(n)} \quad ; \quad b_n = \frac{n^2}{4^n} \quad \text{et} \quad c_n = (-1)^n \sin(\tfrac{1}{n})$$

Question 3 Étudier la convergence de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3}}$$

Indication: Utiliser le développement $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(|x|)$ pour $|x| \to 0$.

Question 4

a) Rappeler la formule d'Hadamard donnant le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$.

b) Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2^n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n+n} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} 4^n x^{2n}$$

Question 5 Discuter la convergence ponctuelle (ou simple) ainsi que la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes:

a) $f_n(x) = (\sin(x))^n$ sur $I = [0, \pi]$.

b) $g_n(x) = \arctan(n + n^2 x)$ sur $I = [0, \infty)$.

Question 6

a) Calculer la limite de la *suite* de fonctions (f_n) définies par $f_n(x) = x\left(\cos(\frac{x}{\sqrt{n}})\right)^n$.

Indication: pour $n \geq \sqrt{x}$, écrire $f_n(x) = xe^{g_n(x)}$, puis utiliser un développement limité de g_n.

b^*) Montrer convergence uniforme sur tout intervalle borné pour déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x \cos(\tfrac{x}{\sqrt{n}})^n \, dx$$

Question 7 Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$. En utilisant le développement en série entière de f obtenir la valeur de la série numérique

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7n)2^n}{3^n}$$

— TOURNER LA PAGE, S.V.P. —

Question 8 Soit f la fonction 2π–périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x^2 & \text{si } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

a) Faire une esquisse de la courbe représentative de f.
b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
c) En évaluant la série de Fourier de f au point $x = 0$, calculer

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2}$$

Problème. On démontrera un théorème (de Weyl) suivant: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, 2π-périodique. Alors pour tout réel $\gamma \notin \mathbb{Q}$,

$$\tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(2\pi n\,\gamma) \quad \xrightarrow{N\to\infty} \quad \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \tag{1}$$

a) Montrer (1) pour $f(x) \equiv 1$.
b) Soit $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\delta} \neq 1$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} e^{i\delta n} = e^{i\delta} \frac{1 - e^{i\delta N}}{1 - e^{i\delta}}$$

c) En déduire (1) pour $f(t) = e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.
d) Utiliser (a) et (c) pour établir (1) pour tout polynôme trigonométrique, c'est à dire des fonctions de la forme

$$P(t) = \sum_{k=-K}^{K} \alpha_k e^{ikt}, \qquad (\alpha_k \in \mathbb{C}).$$

e^*) Soit f continue et 2π-périodique et $\varepsilon > 0$. Le théorème de Fejér assure l'existence d'un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon/3$ (ceci est admis). S'en servir pour établir le théorème.

— FIN —