université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015 / 2016
DEVOIR SURVEILLÉ

Licence 2, analyse 3
Durée : 1h30
Documents : non autorisés
Calculatrice: inutile, mais autorisé

Collège Sciences et technologies

Penser à bien justifier vos réponses.
La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1 Étudier la convergence / divergence des séries suivantes. Il n'est pas demandé de trouver la valeur numérique de la série en cas de convergence.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{\arctan(n)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n}}$$

Exercice 2

(a) Question de cours: soient $\alpha, \beta > 0$. Pour quelles valeurs de α, β a-t-on convergence de la série

$$\sum_{n=42}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

Il n'est pas nécessaire de donner une preuve.

(b) Soient $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles positives. En supposant que la série $\sum a_n$ diverge et que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, que peut on déduire sur la convergence de la série $\sum b_n$? Choisir parmi les trois réponses ci-dessous.

(A) La série $\sum b_n$ converge
(B) La série $\sum b_n$ diverge
(C) On ne peut rien conclure sur la convergence /divergence de la série $\sum b_n$.

Justifier votre réponse: preuve ou bien deux exemples: un exemple d'une suite (b_n) dont la série converge, un autre ou elle diverge.

Exercice 3 Pour chacune des séries entières suivantes, expliciter le terme général a_n pour tout $n \geq 0$, puis déterminer le rayon de convergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)\, z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n\, 3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$$

Dans le cas où $R < \infty$, étudier la convergence sur le cercle de convergence $\{z \in \mathbb{C} : \quad |z| = R\}$.

Exercice 4 Pour $\alpha > 0$ soit $I(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$.

(a) Justifier que $I(\alpha)$ converge comme intégrale impropre de Riemann pour tout $\alpha > 0$.
(b) En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(\alpha)$ et $I(\alpha+1)$ pour $\alpha > 1$.
(c) Expliciter $I(1)$, puis montrer $I(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
(d) Il est admis que la fonction $\alpha \mapsto I(\alpha)$ est croissante pour $\alpha \geq 2$. Par une comparaison série-intégrale, montrer que l'intégrale

$$\int_2^\infty \frac{1}{I(\alpha)}\, d\alpha$$

converge. Indication: on pourra, sans la démontrer, utiliser la question bonus ci-dessous.
(e) (Question bonus) Soit f une fonction monotone sur un segment fini $[a, b]$. Montrer que f est Riemann intégrable sur $[a, b]$.

— FIN —