Corrigé

Ex1. (a) $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim_\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$. La série diverge par le critère de Riemann.

(b) $\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} \sim_\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ La série converge par le critère de Riemann.

(c) $\frac{n}{n+1} \to 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ La série div. grossièrement

(d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n+1}{n+2}\right)^2$

$$= \frac{(n+1)^3}{n(n+2)^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^2+4n}.$$

Ainsi, $a_n \searrow 0$ monotonément ($n^2+n \geq 1$!)
Par Leibniz, la série converge donc.

Ex2 (a) Le rayon de conv. R est l'unique const. t.q.
$|z| < R \Rightarrow$ la série cv
et $|z| > R \Rightarrow$ la série div.

ou: Il est égal au "plus grand" rayon t.q. la série cv dans le disque $D(0,R)$

aussi accepté: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ avec la convention "$\frac{1}{0} = +\infty$" et "$\frac{1}{+\infty} = 0$".

(b) (1) $3^n \leq 1+3^n \leq 2\cdot 3^n \rightarrow 1+3^n \sim 3^n$.

On a donc $R = \frac{3}{2}$

(2) $\frac{1}{1+n!} \le \frac{1}{n!}$ et $\sum \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$ a le rayon $+\infty$.

La série (2) donc également.

(3) $\sqrt[2n]{n^3} = e^{\frac{3\ln(n)}{2n}} \longrightarrow 1. \Rightarrow \sqrt[2n]{|a_{2n}|} \longrightarrow \sqrt{5}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(4) $1 \le \ln(n)^{\ln(n)}$ pour $n \ge 3$ donc $R \le 1$.

$$1 \le \sqrt[n]{\ln(n)^{\ln(n)}} = e^{\frac{\ln(n)\cdot \ln(\ln(n))}{n}} \le e^{\frac{\ln(n)^2}{n}} \longrightarrow 1$$

$\Rightarrow R = 1$.

(c)(1) Si $|z| = \frac{3}{2}$, $z = e^{i\theta}\cdot\frac{3}{2}$, $\sum \frac{2^n}{1+3^n} z^n = \sum \frac{3^n}{1+3^n} e^{in\theta}$.

Cette série div. grossièrement car le terme général ne tend pas vers zéro.

(2) $R = +\infty$. Rien à faire

(3) Si $|z| = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $z = e^{i\theta}\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sum_1^\infty \frac{5^n}{n^3} z^{2n} = \sum_1^\infty \frac{e^{in\theta}}{n^3}$.

Cette série conv. abs., donc elle converge.

(4) Pour $|z| = 1$, le terme général ne tend pas vers 0, donc div. grossière.

(d) On observe $|z_0| = |z_1| = 5$.

CV en z_0 implique donc $R \ge 5$

div. en z_1 implique donc que $R > 5$ est absurde.

Ainsi, $R = 5$.

Ex3. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\frac{x+1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$. 3

Donc $f_n(x) \longrightarrow 0$ simplement.

(b) $\| f_n - f \|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} | f_n(x) | = +\infty \not\to 0$

$\Rightarrow$ pas de cv unif. sur $\mathbb{R}$.

(c) $h(x) = x+1$ borné sur $[a,b]$, disons par $C>0$.
(h cont. !)

$\Rightarrow \sup_{[a,b]} | f_n(x) - 0 | \leq \frac{C}{n+1} \longrightarrow 0$

donc cv unif. sur intervalles compacts.

Ex4. (a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

(b) Pour x fixé, $\sin\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}$ donc

$\sum g_n(x)$ cv par Riemann simplement.

(c) Par contre, $\| g_n \|_\infty \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et on n'a

pas de cv normale sur $\mathbb{R}$.

(d) Sur $[a,b]$ cela change : Pour n suff. grand,
$[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}] \subset [-\pi, \pi]$, et donc $\left| \sin(\frac{x}{n}) \right| \leq \left|\frac{x}{n}\right|$

$\leq \frac{\pi}{n}$.

Ainsi, pour $n \geq n_0$, $\sup_{x \in [a,b]} | g_n(x) | \leq \frac{C}{n^{3/2}}$

et la cv. est normale sur $[a,b]$.

(e) sur $[a,b]$ la conv. est normale, donc uniforme. Les g_n étant tous de classe $\mathcal{C}^\infty$, la série G est continue sur (a,b) pour $a<b$ quelconque.
Donc G est continue sur tout $\mathbb{R}$!

(f) $g_n'(x) = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{1}{n} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$.

$\|g_n'\|_\infty = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2 n^{3/2}}$.

La cv est donc normale sur $\mathbb{R}$.

On a : · $g_n \in \mathcal{C}^\infty$
· $\sum g_n$ conv. (au moins dans un point)
· $\sum g_n'$ cv. unif^t.

Par un th du cours, G est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

<u>Ex 5</u> (a) $n=m$: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{inx} dx = 1$.

$n \neq m$: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)x} dx = 0$ par 2π-périodicité de e^{ikx}

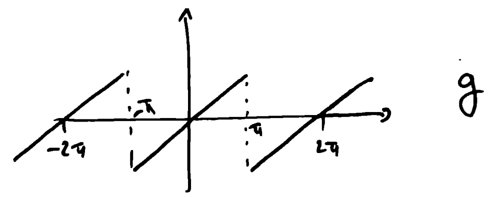
(b) $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)$.

On a donc : Pour $\cos(x)$: $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & |n|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $\cos^2(x)$: $c_n = \begin{cases} 1/2 & n=0 \\ 1/4 & |n|=2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Problème (a)



(b) $S_N(g;x) = \sum_{-N}^{N} e^{inx} \cdot c_n$. (ou avec sin / cos)

(c) ou : $S_N(g;x)$ est continue. Si la cv était unif, la limite le serait aussi.
OR, sur $(-\pi,\pi)$ la limite est g. La discontinuité en $x=\pi$ (p. ex.) fait que $\lim_N S_N(g;x)$ ne peut être cont. en $x=\pi$!

ou : $\lim_N S_N(g;\pi) = \frac{1}{2}(\pi + (-\pi)) = 0$ par le thm de Dirichlet, et $\lim_N S_N(g;x) = x$ pour $x \in (0,\pi)$. Donc $\lim_N S_N$ discontinue $\Rightarrow$ cv non-uniforme.

(d) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{-inx}\, dx \underset{\text{IPP}}{\overset{\boxed{n\neq 0}}{=}} \frac{1}{2\pi}\left[x \frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{in}\, dx}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-1)^n\left(\frac{\pi+\pi}{-in}\right) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{in}.$$

$n=0$: $$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = 0.$$

(e) $$S_n(g;x) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1}\frac{e^{ikx}}{ik} + (-1)^{k+1}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right] = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin(kx).$$

(f) L'intégrale de $\frac{\sin(x)}{x}$ sur $[0, \pi]$ est faussement impropre car $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ existe. Avec cette limite, $\frac{\sin(x)}{x}$ devient continu et donc R-intégrable.

(g)

$$S_n\left(g, \pi - \frac{\pi}{n}\right) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin\left(k\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin\left(\pi \frac{k}{n}\right) \cdot \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{n}\right)}{\pi \frac{k}{n}}\right)$$

ce qui est la somme de Riemann associé a une subdivision de $[0, \pi]$ en n intervalles : $[\frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}]$, $[2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n}]$, …, $[\frac{(n-1)}{n}\pi, \pi]$.

Par R-intégrabilité, $\lim_{n \to \infty} S_n\left(g, \pi - \frac{\pi}{n}\right) = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}$.

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ Rayon de conv. $= +\infty$!

(i)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

car intégrale / sommation sont échangeables à l'int. du rayon de conv.

(j) on se rappelle la preuve du th de Leibniz :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{2n} - \sigma_{2(n-1)} &= b_{2n} - b_{2n-1} \leq 0 \\ \text{et} \quad \sigma_{2n+1} - \sigma_{2n-1} &= -b_{2n+1} + b_{2n} \geq 0 \end{aligned}\right\} \stackrel{si}{=} b_n \downarrow$$

<u>reste à voir</u> : $b_n \downarrow$. On voit facilement

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1.$$

On a donc avec $(\sigma_{2n})_{n\geq 0}$ et $(\sigma_{2n+1})_{n\geq 0}$ 2 suites adjacentes avec limit $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

(k) vu que $\sigma_3 \geq 1,1735$ et $\sigma_4 \leq 1,1794$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \geq 1,17.$$

On en déduit que $\| S_n - g \|_\infty$

$$\geq \left| S_n(\pi - \tfrac{1}{n}) - g(\pi - \tfrac{1}{n}) \right|$$

$$\longrightarrow 1,17 \cdot \underbrace{\|g\|_\infty}_{=\pi}.$$

Ceci est une version " quantitative " de la non-uniformité de la conv.

FIN