Exercice 1 Lesquelles des applications linéaires suivantes sont continues? Justifier vos réponses. Il n'est pas demandé de déterminer la norme d'opérateur, le cas échéant.

a) $R : \ell_1 \to \mathbb{C}$ défini par $R(x_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

Solution:

$$|Rx| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|.$$

Ainsi $\|R\| \leq 1$.

b) $S : \ell_2 \to \mathbb{C}$ défini par $S(x_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

Solution:

$$|Sx| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} = \frac{\pi^2}{6}\|x\|_2.$$

Ainsi, $\|S\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

c) $T : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ défini par $T(x_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

Solution: T n'est pas borné. Obsevons que pour $x_N = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$,

$$Tx_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad +\infty$$

tandis que $\|x_N\|_\infty = 1$.

Exercice 2 Montrer que $|||\varphi||| := \int_0^\pi |\varphi(x)|\, dx$ est une norme sur $X := \mathcal{C}([0, \pi])$.

a) Existe il un $C_1 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, $\quad |||f||| \quad \leq \; C_1 \|f\|_\infty$?

Solution: $C_1 = 1$ convient. En effet, $\int_0^\pi |\varphi(x)|\, dx \leq \pi \max\{|\varphi(x)| : \; x \in [0, \pi]\}$.

b) Existe il un $C_2 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, $\quad \|f\|_\infty \; \leq \; C_2 \, |||f|||$?

Solution: Non! Choisir $f_n(x) = x^n$...

Exercice 3 Soit A une matrice réelle $n \times n$ qu'on identifie avec l'application linéaire $x \mapsto Ax$. On munit $X = \mathbb{R}^n$ avec la norme sup.

a) Exprimer la norme d'operateur $\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$ avec les coefficients (a_{ij}).

Solution: Observons

$$\|A\| = \max \left\{ \Big|\sum_j a_{ij} x_j\Big| : \|x\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Ainsi, $\|A\| \leq \max \sum_j |a_{ij}|$. D'autre part, soit i fixé et

$$x_j = \begin{cases} \frac{\bar{x}}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors $Ax = \sum_j |a_{ij}|$. Or $\|x\|_\infty = 1$, on déduit $\|A\| \geq \sum_j |a_{ij}|$, et ce pour tout i - on passe au max pour obtenir

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_j |a_{ij}| : \quad i = 1..n \right\}.$$

b) Supposons que pour tout $i = 1 \dots n$, $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$. Montrer que le système linéaire $x - Ax = b$, d'inconnue $x \in X$ admet une solution pour tout $b \in X$.
Solution: Par la première partie $\|A\| < 1$. Ainsi, $I - A$ est inversible, d'inverse $\sum_{n \geq 0} A^n$. On déduit le résultat.

Exercice 4 On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme $\|.\|$ quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On dit que f est propre si pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, $f^{-1}(K)$ est compact.

a) Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^d$ qui converge vers y. Montrer que

$$K := \{y_n : n \geq 0\} \cup \{y\}$$

est compact.
Solution: Soit (x_n) une suite de K. Disons $x_n = y_\sigma(n)$, avec $y_\infty := y$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En choisissant une sous-suite strictement croissante de $(\sigma(n))_{n \geq 0}$ on reconnait une sous-suite extraite de (x_n) qui est une sous-suite extraite de (y_n). Or $y_n \to y$, on a $x_n \to y$. Ainsi, K est compact. Rem: on peut égalemnt montrer que K est broné et fermé. Mais le raisonnement ci-dessus marche dans un cadre plus général!

b) On suppose que f est propre. Montrer que l'image par f d'un fermé est un fermé.
Solution: Soit A fermé, $y_n = f(x_n)$ une suite dans $f(A)$. Supposons que $y_n \to y$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors K défini ci-dessus, est compact. Par (a), $f^{-1}(K)$ est compact. Ainsi, x_n admet une sous-suite convergeant vers x. Par continuité de f, $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Or $f(x_{\sigma(n)}) \to y$ comme ss-suite extraite, on obtient $y = f(x)$, ce qui prouve que $y \in f(A)$. Ainsi $f(A)$ est fermé.

c) Montrer que f est propre si et seulement si $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.
Solution: Supposons $\|x_n\| \to \infty$. Si $y_n = f(x_n)$ était borné, K définit en haut serait compact, ce qui donneraitque $f^{-1}(K)$ compact. $x_n \in K$ est alors une contradiction. Reciproquement, soit K un compact. Alors $f^{-1}(K)$ est fermé car f continue. De plus $f^{-1}(K)$ est borné: en effet, supposons par l'absurde une suite non-borné (x_n) dans $f^{-1}(K)$. Alors $f(x_n)$ est non-borné éaglement, et inclus dans K ce qui est absurde.

Exercice 5 Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds,$$

où β est un réel strictement positif.

(a) Pour $a > 0$, calculer la transformation de Fourier de $f_a(x) = e^{-a|x|}$.
Solution: En découpant $\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$, on voit facilement $\widehat{f_1}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Puis on a $\widehat{f_a}\xi = \frac{1}{a}\widehat{f_1}(\xi/a)$ pour tout $a > 0$. Mis ensemble,

$$\widehat{f_a}(\xi) = \tfrac{2a}{a^2+\xi^2}.$$

(b) Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
Solution: En posant $f(x) = e^{-|x|}$, il est clair que cette équation peut aussi s'écrire $u = f + \beta u \star f$.

(c) En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in (0, 1/2)$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.
Solution: On suppose qu'il existe une solution u intégrable. En appliquant la transformée de Fourier, on obtient $\widehat{u} = \widehat{f} + \beta \widehat{u}\widehat{f}$, soit

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{1 - \beta \widehat{f}(\xi)} = \frac{2}{(1-2\beta) + \xi^2},$$

où on a utilisé le fait que $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Dans le cas où $\beta \geq 1/2$, ceci définit une fonction qui n'est pas continue sur aux points $\frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}$. L'équation n'admet donc pas de solution. Si $\beta < 1/2$, l'injectivité de la transformée de Fourier fait qu'il n'existe qu'une seule solution, qu'on détermine en inversant la formule précédente. On trouve :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|}.$$

Exercice 6 Soit $X := \mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, soit $p_n(f) := \max\{|f(x)| : |x| \leq n\}$. Pour $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ posons

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

a) Montrer que l'application $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ (pour $x \geq 0$) est croissante.
Solution: Dériver!

b) Déduire que d est une distance sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Solution: $d(f,g) = d(g,f)$ est immédiat, de même que $d(f,g) = 0$ ssi $f = g$. Finalement, par (a),

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-h)+p_n(h-g)}{1+p_n(f-h)+p_n(h-g)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-h)}{1+p_n(f-h)} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(h-g)}{1+p_n(h-g)} \end{aligned}$$

c) Montrer que $f_n \xrightarrow{d} f$ si et seulement si $p_m(f_n - f) \longrightarrow 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
Indications: "$\Rightarrow$": contraposé. "$\Leftarrow$" couper la série en deux sommes portant sur $n \in \{1 \ldots N\}$ et sur $\{n \geq N\}$ respectivement.
Solution: Si pour une sous-suite, $p_m(f_{\sigma(n)} - f) \geq \delta > 0$, alors $d(f_{\sigma(n)}, f) \geq 2^{-m}\frac{\delta}{1+\delta} > 0$. D'autre part, supposons convergence pour tout m. Soit $\varepsilon > 0$. On retient N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon/2$$

Ensuite, il existe pour chaque m un rang M_m a partir duquel $p_m(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{2N}$. Il suit que $d(f_n, f) < \varepsilon$ pour tout $n \geq M = \max(M_1, \ldots, M_N)$.

d) Montrer que (X, d) est complet.
Solution: Soit (f_n) d-Cauchy. Par l'argument ci-dessus, (f_n) est p_m-Cauchy pour tout m. Ainsi, $f_n|_{[-m,m]} \to g_m$ uniformément par complétude de $\mathcal{C}([-m,m])$ (en particulier g_m est continu). Posons $g(x) := g_m(x)$ si $m > |x|$. Ceci est bien défini, car

$$g_m|_{[-k,k]} \quad = \quad \lim_n \big(f_n|_{[-m,m]}\big)|_{[-k,k]} \quad = \quad \lim_n f_n|_{[-k,k]} \quad = \quad g_k$$

pour $m \geq k$. Or $p_m(f_n - g) = p_m(f_n - g_m) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et ceci pour tout m,on obtient $f_n \to f$ en distance d par (c).

FIN