Devoir surveillé

Analyse : dualité et convergence

4 Novembre 2016

10:00 — 12:30

Exercice 1 Lesquelles des applications linéaires suivantes sont continues?

a) $R : \ell_1 \to \mathbb{C}$ défini par $R(x_n) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

b) $S : \ell_2 \to \mathbb{C}$ défini par $S(x_n) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

c) $T : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ défini par $T(x_n) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

Justifier vos réponses. Il n'est pas demandé de déterminer la norme d'opérateur, le cas échéant.

Exercice 2 Montrer que $|||\varphi||| := \int\limits_0^\pi |\varphi(x)|\, dx$ est une norme sur $X := \mathcal{C}([0,\pi])$.

a) Existe il un $C_1 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, $\quad |||f||| \quad \leq \ C_1 \, \|f\|_\infty$?

b) Existe il un $C_2 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, $\quad \|f\|_\infty \ \leq \ C_2 \, |||f|||$?

Exercice 3 Soit A une matrice réelle $n \times n$ qu'on identifie avec l'application linéaire $x \mapsto Ax$. On munit $X = \mathbb{R}^n$ avec la norme sup.

a) Exprimer la norme d'opérateur $\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$ avec les coefficients (a_{ij}).

b) Supposons que pour tout $i = 1 \dots n$, $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$. Montrer que le système linéaire $x - Ax = b$, d'inconnue $x \in X$ admet une solution pour tout $b \in X$.

Exercice 4 On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme $\|.\|$ quelconque. Soit $f : \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On dit que f est propre si pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, $f^{-1}(K)$ est compact.

a) Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^d$ qui converge vers y. Montrer que

$$K := \{y_n : \ n \geq 0\} \cup \{y\}$$

est compact.

b) On suppose que f est propre. Montrer que l'image par f d'un fermé est un fermé.

c) Montrer que f est propre si et seulement si $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

—tourner la page s.v.p.—

Exercice 5 Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds,$$

où β est un réel strictement positif.

(a) Pour $a > 0$, calculer la transformation de Fourier de $f(x) = e^{-a|x|}$.

(b) Écrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.

(c) En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in (0, 1/2)$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.

Exercice 6 Soit $X := \mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, soit $p_n(f) := \max\{|f(x)| : |x| \leq n\}$. Pour $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ posons

$$d(f, g) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}$$

a) Montrer que l'application $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ (pour $x \geq 0$) est croissante.
b) Déduire que d est une distance sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
c) Montrer que $f_n \xrightarrow{d} f$ si et seulement si $p_m(f_n - f) \longrightarrow 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
Indications: "$\Rightarrow$": contraposé. "$\Leftarrow$" couper la série en deux sommes portant sur $\{n < N\}$ et sur $\{n \geq N\}$ respectivement.
d) Montrer que (X, d) est complet.

FIN