Exercice 1 Soit $\varepsilon > 0$. Existence des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{\varepsilon} \tfrac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{1}{x^\beta}\,dx \qquad \text{puis} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2 Existence des intégrales généralisées suivantes:

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}\,dx \qquad \int_0^1 \tfrac{x^k-1}{\ln(x)}\,dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\int_0^1 \tfrac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \quad (\alpha > -1) \qquad \int_0^{\infty} \tfrac{\sinh(x)}{\sinh(\pi x)}\,dx \qquad \int_0^{\infty} \tfrac{x\,\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_1^{\infty} \arctan(\tfrac{1}{x})\,dx \qquad \int_0^1 x^{-2}\ln(1-x^2)\,dx \qquad \int_0^{\infty} x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

Exercice 3 Etudier suivant les valeurs de α et β la convergence des intégrales suivantes ($0 < a < 1 < b$)

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \qquad \text{et} \qquad \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Exercice 4

a) Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles:

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha}\,dx$$

est convergente.

b) En déduire que $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge. Calculer I.

Exercice 5 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, lorsque ceci a un sens :

$$I_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \qquad \text{et} \qquad J_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

a) Montrer que I_α et J_α sont absolument convergentes pour $\alpha > 1$.

b) En déduire que I_α et J_α convergent pour $0 < \alpha \leq 1$. Que peut-on dire des intégrales

$$A_\lambda = \int_0^{+\infty} \sin(x^\lambda)\,dx \qquad \text{et} \qquad B_\lambda = \int_0^{+\infty} \cos(x^\lambda)\,dx$$

lorsque $\lambda > 1$.

c) Montrer que I_α et J_α divergent si $\alpha < 0$. On pourra considérer $u_n = \displaystyle\int_{(n+\frac{1}{4})\pi}^{(n+\frac{3}{4})\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$

Exercice 6 Existence des intégrales généralisées suivantes:

$$\int_0^\infty \tfrac{x\,\sin(x)}{(1+x^2}\,dx \qquad \int_1^\infty \tfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \qquad \int_{-\infty}^\infty \sin(e^x)\,dx$$

Exercice 7 Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx\ (*) \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)}\,dx\ (**)$$

Indications: $(*)$ calcul direct (IPP), $(**)$ changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

Exercice 8 Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$$

Indications: IPP.

Exercice 9

a) Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a, +\infty[$. Montrer que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

b) Soit f une fonction positive et décroissante définie sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0$.

Exercice 10 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $[0, +\infty]$, telle que

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} (f''(x))^2\,dx$$

convergent. Monter que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} |f''(x)f(x)|\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} (f'(x))^2\,dx$$

convergent.

Exercice 11 Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty]$ telle que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe (f est semi-intégrable).

a) Pour $\alpha \geq 0$, établir l'existence de

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx$$

b) On pose $g(\alpha) = \int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$. Montrer que g est bien définie sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que $\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = 0$.