Exercice 1 Calculer la somme de chacune des séries de terme général u_n suivantes (pour $n \geq 1$ ou $n \geq 2$ suivant les cas)

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2})$$

Exercice 2 (Rappels)

a) Comportement de $\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[n]{n}$ pour $n \to \infty$. Comparer $\sum_{j=1}^{n} \ln(j)$ avec $\int_1^n \ln(x)\,dx$. Déduire une minoration de $n!$, puis étudier le comportement de $\sqrt[n]{n}$ pour $n \to \infty$.

b) Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Étudier la nature des séries de terme général

$$\frac{\ln(n)}{n} \quad \frac{1}{n2^n} \quad \frac{1}{2n-1} \quad \frac{2n-1}{n} \quad \frac{1}{2^n-n} \quad \frac{1}{(2n-1)2n} \quad \frac{n!}{n^n} \quad \frac{1}{\ln(n!)}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+5}} \quad (1+\sqrt{n})^{-n} \quad e^{-\sqrt{n^2+1}} \quad \frac{\ln(n)}{(n+1)^2} \quad n!\,e^{-n} \quad \frac{2n-1}{2^n}$$

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \quad \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n}) \quad \frac{\sqrt{n!}}{(n+2)!} \quad \frac{e^{-n}}{\ln(n)} \quad \frac{-1}{n}\ln\left(\frac{2n-(-1)^n}{2n+1}\right) \quad \frac{1}{(2+\frac{1}{k})^k}$$

Exercice 4 Étudier la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \ln\frac{n-1}{n}\right)$. Déduire que la suite

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln n \tag{1}$$

admet une limite, la constante γ d'Euler.

Exercice 5

a) Soit $\alpha > 0$. Montrer $(k+1)^{-\alpha} \leq \int_k^{k+1} x^{-\alpha} \leq k^{-\alpha}$. Déduire que la série de terme générale $u_n = n^{-\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) Pour $\alpha > 1$, soit R_n le reste de cette série. Montrer que $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

c) Trouver un équivalent de la suite (R_n) pour la série de terme général $u_n = \frac{n}{(2-n^2)^2}$.

Exercice 6

a) Montrer que la série de terme générale $u_n = \frac{1}{n!}$ converge.

b) Donner la formule de Taylor avec reste intégral de la fonction exponentielle. Déduire

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

c) Montrer $\frac{q!}{(q+k)!} < (q+1)^k$ pour $k \geq 1$. En écrivant

$$e = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

déduire que e est irrationnel.

Exercice 7

a) Soit (u_n) positive et décroissante. Montrer que les séries

$$\sum_n u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_n 2^n\, u_{2^n}$$

convergent et divergent simultanément.

b) Étudier la convergence de la série suivante en fonction des paramètres α, β:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

Exercice 8 Soit u_n une suite dans $\mathbb{R}_+$. Monter

a) Si $\sum u_n$ converge, $\sum_n u_n^2$ converge.

b) La série $\sum u_n$ est de la même nature que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 9 Étudier la convergence respectivement convergence absolue des séries de terme général (pour $n \geq 1$):

$$(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-1) \qquad \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \qquad \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n)} \qquad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} \qquad \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \qquad n^{-\alpha}\sin(\frac{1}{n}) \qquad \sin((n+\frac{\alpha}{n})\pi)$$

Exercice 10 Étudier la nature des séries de terme général u_n suivantes

$$(-1)^n(1+\frac{1}{n^3}) \qquad \frac{(-1)^n n+1}{n^2} \qquad \cos(\frac{1}{n})-1 \qquad \frac{1+i\,n}{(n+1)(n+2)} \qquad \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{2n+5} \qquad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \qquad \frac{1}{n}-\frac{1}{5^n} \qquad \frac{n^{1/3}}{(3n)!}$$

Exercice 11

a) Démontrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

b) Que dire de la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)^2}{n}$?

Exercice 12 Étudier la nature des série de terme général

$$(-1)^n \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} \qquad \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \frac{e^{in\alpha}}{n+\cos(n)} \qquad \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)} \qquad \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$$

Exercice 13 Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Montrer que la double somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{k+n+2nk}$$

converge. Calculer ensuite

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k z^{k+n+2nk}$$

de deux manières différentes pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{1-z^{2n+1}}$$

Exercice 14 Soit $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $b_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

a) Calculer les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

b) Déduire la valeur du produit de Cauchy des deux séries.

c) Soit $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Montrer que la série $\sum c_n$ converge. Que dire du produit de Cauchy de c_n avec soi-même, c'est à dire de $d_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \, c_{n-k}$?

Exercice 15

a) Calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, en étudiant les sommes partielles S_{2k-1} et S_{2k}. S'inspirer de (1).

b) Déduire la somme de la série terme général w_n où

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(k+1)(n-k+1)}$$