Examen

Les questions **0**, **I** *et* **II** *sont indépendantes.*

0. Question de cours
Énoncer et prouver le critère spécial des séries alternées.

I. Étude d'une suite de fonctions
1. Montrer que $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{(a-b)}{2} \sin \frac{(a+b)}{2}$.
2. Montrer que la suite de fonctions

$$f_n(x) = \cos \frac{nx}{n+1}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur un segment de $\mathbb{R}$ et puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. Trouver, en utilisant les nombres complexes, une expression simple de la somme finie suivante, a étant un nombre réel et n un entier

$$S = 1 + \cos a + \cos 2a + \cdots \cos na$$

(On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 - e^{i\alpha} = e^{\frac{\alpha}{2}}(e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{\alpha}{2}})$).
5. Pour x réel et n entier, on pose

$$g_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \cos \frac{x}{n+1} + \cos \frac{2x}{n+1} + \cdots + \cos \frac{nx}{n+1}\right).$$

En utilisant la question **4**, montrer que la suite de fonctions $(g_n(x))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue.
6. Montrer que $xg_n(x)$ est une somme de Riemann et retrouver le résultat de la question **5.**.
7.a Calculer $g_n(2\pi(n+1))$.
7.b Montrer que la suite de fonctions $(g_n(x))$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

II. Étude d'une équation fonctionnelle
Pour tout entier $n > 0$, soit u_n la fonction de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{-1}{(n+x)^2}.$$

TSVP

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge simplement sur $]-1, +\infty[$.
Soit $U = \sum_{k\geq 1} u_k$ la somme de cette série de fonctions. Pour tout entier $n \geq 1$, on note U_n la n-ième somme partielle de U définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

2.a Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.
2.b Quel est le sens de variation de U?
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\int_x^\infty \frac{-1}{t^2} dt \leq U(x) \leq \int_{x+1}^\infty \frac{-1}{t^2} dt$. En déduire un équivalent de $U(x)$ au voisinage de $+\infty$.
Soit V la fonction définie par

$$V(x) = \int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{1 - e^t} dt$$

4. Pour quelles valeurs de x l'intégrale définissant V est convergente?
5. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0$.
6. Montrer que U, V vérifient les équations

$$U(x+1) - U(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad V(x+1) - V(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Que peut-on dire de la fonction $U - V$?
7. En déduire que $U = V$.