Devoir Surveillé, Analyse 3
08/03/2013, 8h-9h30

Les parties **0**, **I** *et* **II** *sont indépendantes. Page unique.*

0. Énoncer le critère spécial des séries alternées. Illustrer par un exemple.

I. Étude d'une intégrale

1. Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 \log t}{(1+t^4)^3}\, dt$$

existe.

2. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = t^4$, que

$$I = \frac{1}{16} \int_0^{+\infty} \frac{\log u}{(1+u)^3}\, du$$

3. Trouver une primitive de

$$f(u) = \frac{\log u}{(1+u)^3}$$

4. En déduire que $I = -\dfrac{1}{32}$.

II. Relation Intégrale-Série

1. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{-\log u}{1+u^2}\, du$ existe.

2. Prouver, de deux manières différentes, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

On note S la somme de cette série.

3. Montrer que

3.a la fonction $u \to \dfrac{u \log u}{1+u^2}$ est bornée sur $]0, 1]$.

3.b $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} \log u\, du = 0$.

4. Montrer que pour tout entier N

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k u^{2k} + (-1)^{N+1} \frac{u^{2N+2}}{1+u^2}$$

(*On pourra, soit procéder par récurrence sur l'entier N, soit évoquer une progression géométrique convenable*).

5. Établir l'égalité $J = S$.