Exercice 1 Étudier la convergence uniforme de $\sum u_n(x)$ sur E, où

a) $u_n(x) = \frac{1}{xn^2}$ et $E = [a, \infty)$ pour $a > 0$

b) $u_n(x) = \frac{1}{xn^2}$ et $E = (0, \infty)$.

c) $u_n(x) = \frac{1}{2^n(1+nx)}$ et $E = \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 Montrer que la série $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z}{(1+|z|)^n}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

a) Calculer $f(z)$.

b) La convergence, est-elle uniforme sur $\mathbb{C}$?

c) Et sur des anneaux $\{z \in \mathbb{C} : \ a \leq |z| \leq b\}$?

Exercice 3 Pour $n \geq 1$ on pose $u_n(x) = x^n \ln(x)$ pour $x \in (0, 1]$ et $u_n(0) = 0$.

a) Est-ce que u_n est continue sur $[0, 1]$? On pose $u(x) = \sum_n u_n(x)$

b) Calculer $u(x)$. Étudier la convergence uniforme sur $[a, b]$ pour $0 \leq a < b \leq 1$.

c) On pose de façon classique $u(x) = S_n(x) + R_n(x)$. Montrer que

$$\int_0^1 u(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\, dx$$

Exercice 4 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions, définie par

$$f_n(x) = \frac{n\,x}{n^3+x} \qquad \text{sur} \quad E = [0, \infty)$$

a) Montrer que $f = \sum f_n$ converge pour tout $x \in E$.

b) Étudier la convergence du terme général f_n vers 0. Que déduire pour la série f?

c) Montrer que f est quand même continue, en montrant convergence normale sur $[0, R]$ pour tout $R > 0$.

Exercice 5 Quel est le domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n\geq 1} ne^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}$?

a) Discuter la convergence sur $[a, \infty)$ et $(0, \infty)$.

b) Calculer $\int_1^2 f(x)\, dx$.

Exercice 6 Soit (a_n) une suite réelle bornée.

a) Montrer que pour $x > 1$, la série $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-x}$ converge.

b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, \infty)$ pour tout $a > 1$.

c) Montrer que f est continue et dérivable sur $(1, \infty)$.

Rappel: Soit $a_n \geq 0$ une suite qui converge monotonément vers 0. Son pose comme d'habitude $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$, $S = \lim S_n$ et $R_n = S - S_n$. Montrer que $|R_n| \leq a_n$.

Exercice 7 Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \tfrac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

a) Discuter continuité et dérivabilité de la somme.
b) Discuter la somme $g(x)$ de terme général $g_n(x) = |f_n(x)|$: montrer dérivabilité de la somme pour $x > 0$.
c) Montrer que g n'est pas dérivable en 0.

Exercice 8 On considère la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \arccos(\frac{1}{n+x^2})$.
a) Quel est le domaine de convergence de la série?
b) Montrer l'uniformité de la convergence sur $[-a, a]$ pour $a \in (0, 1)$.
c) Étudier la dérivabilité de la somme $f(x)$.

Exercice 9 On considère la série de fonctions $u(x)$ de terme général

$$u_n(x) = x^n \arcsin(\tfrac{x}{n}), \qquad \text{pour} \quad x \in E = [-1, 1].$$

a) Pour quels $x \in E$ a-t-on convergence absolue?
b) Déterminer le domaine de convergence de la série $u(x)$.
c) Donner l'intervalle sur lequel la série $u(x)$ converge uniformément.
d) Soit $a \in (0, 1)$. Montrer que la série

$$\sum nx^{n-1} \arcsin(\tfrac{x}{n})$$

converge uniformément sur $[-a, a]$.
e) Déduire l'expression pour $u'(x)$.

Exercice 10 Soit $\alpha > 1$ et $\beta > 0$. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$u_n(x) = \tfrac{1}{n^\alpha} \ln(1 + n^\beta x^2).$$

a) Montrer que la série $f(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que la série $g(x) = \sum_{n \geq 1} u_n'(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c) Soit $[a, b]$ un intervalle fermé, ne contenant pas 0. Montrer que la série de terme général $u_n'(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$. Déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
d) Montrer que la série de terme général $u_n'(x)$ converge uniformément sur des intervalles compacts si $al > 1 + \beta/2$.
e) Montrer que

$$N^{\beta/2} \sum_{n \geq N} u_n(N^{-\beta/2}) \geq \tfrac{\ln(2)}{\alpha - 1} N^{1+\beta/2-\alpha}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et déduire que f n'est pas dérivable en $x = 0$ si $al < 1 + \beta/2$.