Analyse 3, correction du DS

Exercice 1. *Montrer que les intégrales de Fresnel*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx, \quad \int_0^\infty \cos(x^2)dx$$

sont convergentes.

Une première méthode est basée sur l'intégration par parties, on a pour $0 < u < v$

$$\int_u^v \cos(x^2)dx = \int_u^v \frac{2x}{2x}\cos(x^2)dx = \left[\frac{\sin x^2}{2x}\right]_u^v + \int_u^v \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx.$$

Le crochet admet une limite nulle lorsque u tend vers 0 et v tend vers l'infini. D'autre part

$$\lim_{u\to 0, v\to\infty} \int_u^v \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx.$$

Cette dernière intégrale étant impropre seulement à l'infini et convergente. En fait elle est même absolument convergente. Donc $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ converge.

On procède de la même manière pour $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ en adoptant toutefois comme primitive de $2x\sin(x^2)$ la fonction $-\cos(x^2) + 1$.

Une seconde méthode consiste à restreindre l'étude à l'intervalle $[1, \infty[$ faire le changement de variable $t = x^2$ et utiliser la règle d'Abel pour les intégrales.

Exercice 2. *On considère* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\log(1-t^2)dt$.

a. *Montrer que I existe.*

La fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^2}\log(1-t^2)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$. Elle admet la limite -1 lorsque t tend vers 0^+. Lorsque t tend vers 1^-, on a

$$f(t) \sim \log(1-t), \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 1^-} \sqrt{1-t}f(t) = 0.$$

b. *On définit, pour* $x \in]0,1[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2}\log(1-t^2)$. *Montrer que*

$$F(x) = -\frac{1}{x}(1-x)\log(1-x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\log(1+x).$$

Par définition même $I = \lim_{x\to 1^-} F(x)$ avec $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2}\log(1-t^2)$, $x \in]0,1[$. On détermine $F(x)$ en intégrant par parties, $u = \log(1-t^2), v' = \frac{1}{t^2}$. On trouve

$$F(x) = \left[-\frac{1}{t}\log(1-t^2)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

d'où le résultat, vu que $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{1}{t}\log(1-t^2) = 0$ et que

$$2\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \log(1+x) + \log(1-x).$$

c. *En déduire la valeur de I.*

Le calcul de la limite donne $I = -2\log 2$

Exercice 3.

a. *Montrer que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ *est convergente.*

On a une série à termes positifs, la règle des équivalents s'applique. Comme

$$\frac{2n-1}{n^3-4n}\sim\frac{2}{n^2},\; n\to\infty$$

la série donnée converge.

b. *Trouver* $a, b, c\in\mathbb{R}$ *tels que pour tout* $n\geq 3$*:*

$$\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{a}{n-2}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n+2}.$$

Que remarque-t-on?

La décomposition en élèments simples $\dfrac{2X-1}{X^3-4X}=\dfrac{a}{X-2}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{c}{X+2}$ donne

$$a=\frac{3}{8},\; b=\frac{1}{4},\; c=-\frac{5}{8}.$$

On remarque que $a+b+c=0$.

c. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{89}{96}$.

Dans la somme partielle

$$S_N=\sum_{3\leq n\leq N}\frac{2n-1}{n^3-4n}=\sum_{3\leq n\leq N}\{\frac{\frac{3}{8}}{n-2}+\frac{\frac{1}{4}}{n}-\frac{\frac{5}{8}}{n+2}\}$$

beaucoup de termes se détruisent et il reste

$$S_N=\frac{3}{8}\times\frac{1}{1}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}$$

$+$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{8}\right)\frac{1}{N-1}+\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{8}\right)\frac{1}{N}-\frac{5}{8}\frac{1}{N+1}-\frac{5}{8}\frac{1}{N+2}.$$

Donc

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{89}{96}.$$

Exercice 4. *Etudier, à l'aide d'un développement limité, la nature de la série de terme général* $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\frac{n}{\log n}}$.

Un développement limité donne

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n}\times\frac{1}{1+(-1)^n\frac{1}{\log n}}=\frac{(-1)^n}{n}\left[1-\frac{(-1)^n}{\log n}+\frac{1+\epsilon_n}{(\log n)^2}\right]$$

où $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n=0$. Mais la série $\Sigma_{n\geq 3}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées, la série $\Sigma_{n\geq 3}\dfrac{1}{n\log n}$ est une série de Bertrand divergente et $\Sigma_{n\geq 3}\dfrac{(-1)^n(1+\epsilon_n)}{n(\log n)^2}$ est convergente car elle l'est absolument, $\Sigma_{n\geq 3}\dfrac{1}{n(\log n)^2}$ étant une série de Bertrand convergente. Donc la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\frac{n}{\log n}}$ est divergente.

Exercice 5. *On considère la suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sin^2 x + (1+x^2)^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

a. *Montrer que les fonctions* f_n *sont continues.*
Chacune des fonctions f_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur ne s'annulant sur $\mathbb{R}$

b. *Trouver la limite simple* f *de la suite de fonctions* (f_n).
On a $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$. La limite simple de la suite de fonctions (f_n) est

$$f(0) = 1, \quad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

c. *A t-on convergence uniforme sur un intervalle contenant* 0*? Justifier votre réponse.*
La convergence n'est pas uniforme sur un intervalle contenant 0 car la limite simple est discontinue sur cet intervalle.

d. *A t-on convergence uniforme sur un intervalle dont une extrémité est* 0*? Justifier votre réponse.*
La convergence n'est pas uniforme sur un intervalle J dont une extrémité est 0 car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

et par conséquent $\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$ n'admet pas la limite 0 pour n infini.

e. *A t-on convergence uniforme sur un intervalle* $[a, b]$ *ne contenant pas* 0*? Justifier votre réponse.*
Supposons, pour fixer les idées, que $0 < a < b$, alors

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n},$$

donc $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 et la convergence est bien uniforme sur $[a, b]$.
Remarquons que b pouvant être infini.