Raisonnements pour des questions topologiques.

September 29, 2020

Raisonner

Un argument topologique nécessite une certaine créativité, il n'y a pas de algorithme "comment procéder". La liste ci-dessous montre une partie des moyens qui servent souvent. Garde: attaquer une question sans se faire un petit dessin est un bon moyen de perdre son temps et les points à la fois. Faites donc en un !!! Une fois que le dessin illustre la situation, jouez: complémentaires? boules? suites par l'intérieur, l'extérieur, images directes ou réciproques (pas confondre les deux!), produits, ..etc.

Ouverts

Les ouverts ont la propriété que $x \in \mathcal{O}$ implique $B(x,r) \subset \mathcal{O}$ pour un certain rayon $r > 0$ (qui dépend de x). On peut tester ceci souvent à la main. Ne pas hésiter à changer la norme, si convenable, car une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ (peut importe la norme choisie!) est ouverte.

Une suite qui converge vers $x \in \mathcal{O}$ ouvert est donc "absorbé" par $\mathcal{O}$: à partir d'un certain rang: $\|x_n - x\| < r$ ce qui implique $x_n \in \mathcal{O}$ — ceci est vrai pour $n \geq N$ par la def. de la convergence d'une suite! (moyen de montrer "non-ouvert" ! Exemple: $A = (0,1]$ pas ouvert car $(1 + 1/n) \to 1$ mais la suite n'est pas absorbé dans A.

La notion des ouverts est lié à la continuité: f est continu ssi les images réciproques de tous les ouverts sont ouverts. Ainsi, $\{x : \sin(x) < 1/2\} = f^{-1}((-\infty, 1/2))$ pour $f(x) = \sin(x)$ est un ouvert car sin() continue. Attention: l'image directe d'un ouvert n'a pas raison d'être ouvert: $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$ n'est pas ouvert.

Finalement, pour tester si $\mathcal{O}$ est ouvert, ne pas oublier que des unions quelconques et des intersections finis sont ouverts:

$$\{(x,y) : x > 0 \text{et} |y| < 1 + x^2\} = \{(x,y) : x > 0\} \cap \{(x,y) : f(x,y) < 0\}$$

où $f(x,y) = |y| - 1 - x^2$ et

$$\{x : \exists n \in \mathbb{N} : |x - n| < 1/n\} = \bigcup_n B(n, 1/n)$$

Des produits finis d'ouverts sont ouverts (type: $(a,b) \times (c,d)$): ceci se marie bien comme argument avec unions quelconques et des intersections finies.

Cardinalité: dans un e.v.n. un ouvert non-vide contient une boule, il est donc non-dénombrable: ainsi, pas besoin de lamenter pour discuter si $\mathbb{Q}$ (dénombrable) est ouvert ou pas: il ne l'est pas! Pareil pour des parties finies ...

L'argument "$\mathcal{O}$ ouvert, donc non-fermé" est un *champignon toxique*. Si $\mathcal{O}$ est non-trivial (!) et si l'espace est connexe (tout e.v.n. est connexe), ceci est vrai. Cela dit: "non-fermé" se montre d'un coté plus facilement à la main, de l'autre, les mauvaises habitudes de cet argument portent plus de risques qu'elles font de bien. A Éviter.

Fermés

Les fermés sont les complémentaires des ouverts. (possibilité de preuve!). Éviter la faux raisonnement "non-fermé donc ouvert" (=zéro points), ou "non-ouvert donc fermé" (de même).
Un fermé F est fermé sous prise de limites: $x_n \in F$ et $x_n \to x$ dans X implique $x \in X$. Ceci est élégant pour montrer "non fermé" par une suite convenablement choisie: ex: $A = (0, 1]$ non fermé car $1/n \in A$ mais $0 \notin A$.

Les parties finies sont fermés (dem: Cauchy dans un ensemble fini implique stationnaire).

Car "image réciproque" et "complément" commutent, tout image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé: $\mathbb{Z} = \sin(\pi\cdot)^{-1}(\{0\})$ est fermé car $\{0\}$ est fini, donc fermé. En particulier, les boules fermés $B[a, r]$ sont fermés (image reciproque de $[0, r]$ par $f(x) = \|a - x\|$). Ne pas hésiter à changer de norme, si utile, car la propriété "fermé" n'en dépend pas (en dimension finie). Attention: L'image directe d'un fermé n'a pas de raison d'être fermé: $F = \{(x, 1/x) : x > 0\}$ est fermé, la projection sur la première coordonnée est $(0, \infty)$, pas donc fermé.

Les fermés sont stables par intersections quelconques et unions finis. Des produits finis de fermés sont fermés (type: $[a, b] \times [c, d]$), ceci se marie bien avec des arguments d'unions finies et d'intersections quelconques.

Compacité dans $\mathbb{R}^n$

Une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte ssi elle est borné et fermé. Ceci est très utile dans les deux sens! On peut démontrer compact et "non-compact" avec cette caractérisation.

L'image continu d'un compact est compact. Ex: $K \times L$ est compact si K et L sont compacts, par "borné & fermé". Puis $(x, y) \to x + y$ est continu. Donc: $K + L = \{k + l : k \in K, l \in L\}$ est compact. Exemple: $K_r = \{x : dist(x, K) \leq r\} = K + B[0, r]$ est compact.

La définition séquentielle s'utilise aussi pour montrer (non)-compacité: Ex: $\mathbb{Z}$ n'est pas compact, car aucune suite d'entiers ne peut-être Cauchy, sauf si elle est stationnaire. La suite $x_n = n$ n'a donc (!) pas de sous-suite convergente. D'autre part, une partie finie est compacte, car toute suite admet une sous-suite constante (pigeonhole principle!). ETC.