La base logique: Le principe base sur l'axiome 'tertiur non datur', c'est à dire du tiers exclu. Cela veut dire qu'une assertion est soit fausse, soit vraie mais rien d'autre (le 'tiers'). Par exemple 'ni vraie ni fausse' pourrait être un tel tiers - mais *par axiome on n'accepte pas la possibilité d'un tiers.*
La méthode de démonstration: Si on veut montrer qu'une assertion ou proposition P est vraie il suffit donc de *supposer* que P soit fausse et d'en déduire une contradiction en utilisant les axiomes et conclusion admises. Comme les mathématiques sont libres de contradictions, P ne peut pas être fausse. Par le 'tiers' exclu, P est donc vraie.
Vous connaissez cette méthode de la vie pratique depuis longtemps! Imaginez qu'un bijoutier a été cambriolé. L'alarme a sonné à 23:45h et la police était sur place a 23:59h. Les soupçons se portent sur monsieur X qui est bien connu dans la scène. Celui explique à la police: si j'étais le cambrioleur, j'aurais dû être dans le magasin entre 23:45h et 23:57h. Mais c'était le soir de mon mariage, on était dans un hôtel à 50km du bijoutier et à 23:45 j'ai fait un speech. Après j'ai dansé avec ma belle-mère. Ceci est confirmé par des dizaines de témoins - la police est *donc* forcé à l'innocenter.
Un grand danger: Si on commence, basé sur l'hypothèse que P soit fausse un calcul tordu dans lequel on fait une faute (logique, ou de calcul), ceci peut bien sûr mener à une contradiction quelque part - sans représenter une démonstration que P est vraie! Autrement dit: dans les démonstration par absurde il faut travailler avec la plus grande vigilance.

Exercice 1 Montrer que l'équation $x^2 - y^2 = 6$ ne peut pas avoir des solutions x, y *entières* et *positives.*

Exercice 2 Montrer que l'équation $x^2 - y^2 = 10$ ne peut pas avoir des solutions x, y *entières* et *positives*. Qu'est-ce qu'il y a avec l'équation $x^2 - y^2 = 25$ ou $x^2 - y^2 = 12$? Est-ce que vous comprenez le mécanisme qui mène à l'existence où non-existence de solutions?

Exercice 3

(a) Se rendre compte de la construction du système décimal: un nombre s'écrit comme une somme des décimales (entre 0 et 9) fois des puissances correspondantes de 10: par exemple

$$\begin{aligned} 1034 &= 1 \times 1000 + 0 \times 100 + 3 \times 10 \ \ + 4 \times 1 \\ &= 1 \times 10^3 \ \ + 0 \times 10^2 \ + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0. \end{aligned}$$

On appelle un nombre *pair* si la dernière décimale, c'est à dire celle qui correspond à 10^0 est parmi les nombres $0, 2, 4, 6, 8$. Démontrer (sans réduction par absurde) qu'un nombre n est pair si et seulement si on a $n = 2m$ pour un certain entier m.

(b) Un nombre entier qui n'est pas pair est appelé *impair*. Déduire de (a) que tout nombre impair s'écrit de la forme $n = 2m + 1$ pour un certain entier m.

(c) Montrer par absurde que si n^2 est impair, alors n est impair.

(d) Montrer par absurde que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 4 Montrer que si la dernière décimale d'un nombre n est parmi $2, 3, 7$ ou 8, alors n n'est pas un carré d'un entier.

Exercice 5 On veut timbrer une lettre avec exactement 4 euros et 85 centimes et on dispose de timbres de 45 centimes ainsi que de 10 centimes. Montrer qu'il faut coller un nombre impair de timbres à 45 centimes.

Exercice 6 Montrer que si a est rationnel et si b est irrationnel, alors $a + b$ est irrationnel.

Exercice 7 Montrer que l'équation $x^3+x+1 = 0$ n'admet pas de solution rationnelle.

Exercice 8 Montrer que l'équation $x^5+x^4+x^3+x^2+1 = 0$ n'admet pas de solution rationnelle.

Exercice 9 Montrer que l'équation $10^x = 7$ n'admet pas de solution rationnelle.

Exercice 10 Montrer que n^2 croît plus vite vers l'infini avec $n \to +\infty$ que $c\,n$ indépendant du choix de $c > 0$.

(a) Exprimer l'assertion d'abord avec des quantificateurs.

(b) Donner la démonstration par absurde.

Exercice 11 Donner une démonstration par absurde de l'assertion suivante: Si A, B, C sont des ensembles telles que $A \subset B$ et $B \cap C = \emptyset$ alors $A \cap C = \emptyset$.

Exercice 12 Pour deux ensembles A et B on définit $A \,\Delta\, B$ comme l'ensemble formé des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ainsi que des éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Démontrer que si $A \,\Delta\, B = \emptyset$, alors on a $A = B$.

(a) Exprimer avec des quantificateurs l'assertion $A \,\Delta\, B = \emptyset$.

(b) Écrire la négation de la formule $\forall x \in A : \; x \in B$.

(c) Donner la démonstration par absurde. On pourra utiliser que $A = B$ ssi $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exercice 13 Soient $a_1, \ldots, a_N$ des nombres positives réelles. Montrer que si on a pour la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_N > M$ alors $\max\{a_1, \ldots, a_N\} > \frac{M}{N}$.