Exercice 1 Montrer que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 Montrer que $5 + 8 + 11 + \ldots + (5 + 3n) = 5(n+1) + 3\frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 Montrer que $6 \,|\, (7^n - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 Montrer que 6 divise $3^n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)k^2 = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k k^2 = \frac{3}{2}(3^n(n^2 - n + 1) - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 Montrer que $1 + x + \ldots x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$. Il existe aussi une très belle (et courte) démonstration 'directe', c'est à dire sans récurrence. Pouvez vous la donner?

Exercice 10 Montrer que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 6}$. Montrer que $x_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12* (Remboursement d'emprunts)
On définit une suite a_n de façon récursive par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = ra_n + s$. On soupçonne qu'il existe une formule de la forme $a_n = cr^n + d$.

1. En considérant les cas $n = 0$ et $n = 1$, déterminer c et d.
2. Vérifier par récurrence que l'on a $a_n = cr^n + d$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On suppose un emprunt de 200.000 euros à un taux de 5%. On rembourse 12.000 euros par an. Qu'est-ce qui sont a, r, s? Quand est-ce que l'emprunt est entièrement payé?

Exercice 13* Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.