

**Les espaces  $\mathcal{D}(\Omega)$  et  $\mathcal{D}_K(\Omega)$**

**EXERCICE 1** Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $L = \text{supp } f$ . Que peut on dire de la distance (euclidienne) de  $L$  à  $\partial\Omega$ ? Même question pour  $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ .

**EXERCICE 2** Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

(a) Construire une suite  $K_n$  de compacts telle que  $K_n \subseteq K_{n+1} \forall n$  et  $\bigcup_n K_n = \Omega$ .

(b) On pose  $p_n(f) := \|f\|_{C^n(K_n)}$  et

$$d(f, g) := \sum_n 2^{-n} \frac{p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}.$$

Soit  $f_n \in \mathcal{D}_{K_{n+1}}$  tel que  $f|_{K_n} \equiv 1$ . Montrer que  $(f_n)$  est une suite de Cauchy par rapport à  $d$ .

(c) Dédurre que  $(\mathcal{D}(\Omega), d)$  n'est pas complet.

*Ceci n'est donc pas la bonne approche ...*

**EXERCICE 3** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert non vide et  $K$  un compact non-vidé de  $\Omega$ . Donner la définition de la convergence d'une suite de fonctions  $(\varphi_k)$  vers  $\varphi$  dans la topologie de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Montrer que  $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ , i.e. que  $\text{Id} : \mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  est un opérateur linéaire continu. Indication: utiliser la caractérisation de la continuité par les suites convergentes.

**EXERCICE 4** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert non vide. Soit  $(x_n)$  une suite convergente de  $\Omega$  tel que  $\lim x_n \in \partial\Omega$ . Soit  $(c_n)$  une suite de réels strictement positives. Montrer que

$$U := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \forall n \in \mathbb{N} : |\varphi(x_n)| < c_n\}$$

est convexe, symétrique. Soit  $K \subset \Omega$  compact. Montrer que  $K \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  est fini. En déduire que  $U$  est un ouvert (on pourra montrer que  $U^c$  est fermé).

**EXERCICE 5** Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  définie par

$$f_n(t) = \frac{1}{2^n} \exp\left(\frac{-1}{1 - (t/n)^2}\right) \quad \text{si } |t| < n$$

et zéro sinon. Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact vers une fonction  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  que l'on précisera. A-t-on convergence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ?

**EXERCICE 6** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert non vide.

- (a) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$  et  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  tel que  $\psi|_{K^c} \neq 0$ . Montrer que  $\varphi + \frac{1}{n}\psi \rightarrow \varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ .
- (b) En déduire que  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  est d'intérieur vide dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ .
- (c) Montrer que  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  est un fermé.
- (d) Utiliser une suite  $K_n$  de compacts telle que  $K_n \subseteq K_{n+1}$  pour tout  $n$  et  $\bigcup_n K_n = \Omega$  pour montrer que  $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup \mathcal{D}_{K_n}$ .
- (e) Est-ce que la topologie de  $\mathcal{D}(\Omega)$  peut provenir d'une distance (on appelle une telle topologie *métrisable*)?

**EXERCICE 7** Soit  $K$  un compact non-vidé de  $\mathbb{R}$  (pour faire plus simple - la différence en  $\mathbb{R}^n$  n'est pas énorme). Soit  $p_k$  la seminorme  $p_k(f) = \|f^{(k)}\|_{C(K)}$ .

- (a) Rappeler la distance  $d$  sur  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . Montrer que  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  est un espace vectoriel métrique complet (on dit un espace de Fréchet) qui est de dimension infinie.
- (b) Est-ce que la limite uniforme d'une suite de fonctions de classe  $C^\infty$  est forcément de classe  $C^\infty$ ?
- (c) Soit  $\lambda = (\lambda_k)$  une suite de réels positifs. Montrer que

$$A_\lambda = \{f \in \mathcal{D}_K(\Omega) : p_k(f) \leq \lambda_k\}$$

est un compact de  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  (Indications: utiliser Ascoli-Arzelà et un 'argument diagonale').

- (d) Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  et  $\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$  la boule d'unité par rapport à  $\|\cdot\|$ . Montrer que si les topologies de  $d$  et de  $\|\cdot\|$  sont égales (par exemple si les suites  $\|\cdot\|$ -convergentes coïncident avec les suites  $d$ -convergentes), alors  $p_k$  est borné sur  $\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ . Conclure que  $\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1) \subset A_\lambda$  pour une suite  $\lambda = (\lambda_k)$  convenablement choisie.
- (e) Est-ce que la topologie de  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  peut provenir d'une norme?

### Exemples

**EXERCICE 8** Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . A quelle condition existe-t-il  $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $F' = \varphi$ ?

**EXERCICE 9**

- (a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $h \in C_c(\mathbb{R})$  telle que  $h * f = f$  pour tout  $f \in C_c(\mathbb{R})$  (Indication: comment est-ce qu'on montre que l'unité d'un groupe est unique? S'inspirer de cette idée en remplaçant  $\delta_0$  par une approximation convenable pour trouver un argument par absurde).
- (b) Existe-t-il une telle fonction  $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ ? (modifier un peu les idées de la première question).

EXERCICE 10 Démontrer que l'on définit une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \quad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Cette distribution, dite *valeur principale* est noté  $\text{vp}(1/x)$ . Montrer que son ordre est inférieur ou égal à 1.

EXERCICE 11 Pour  $-2 < \alpha < -1$  et  $\varepsilon > 0$  montrer que quelque soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on a

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\alpha} \varphi(x) dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_{\varepsilon}$$

où la constante  $A$  ne dépend pas de  $\varepsilon > 0$ . Montrer que  $R_{\varepsilon}$  tend vers une limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . On appelle

$$\langle \text{pf } x_+^{\alpha}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_{\varepsilon}$$

la *partie finie* de  $x^{\alpha}$ . Montrer qu'il s'agit d'une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

EXERCICE 12 Démontrer que la formule  $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$  définit un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Quelle est son ordre?

EXERCICE 13 Démontrer que la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$$

définit un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Cette distribution, est-elle d'ordre fini?

Indication: on pourra procéder par l'absurde: si  $T$  est d'ordre  $m \in \mathbb{N}$ , on choisit  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  à support dans  $[-1, 1]$  égale à 1 sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et on pose pour  $\lambda > 1$

$$\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} h(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \psi(\lambda(x - (m+1))).$$

EXERCICE 14 Soit  $0 \neq \varphi$  une fonction positive de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  de support dans  $]0, \infty[$ . Démontrer qu'il existe deux constantes  $C, \beta > 0$  telles que, pour tout  $n \geq 1$  on ait

$$\int_0^{\infty} \exp(\frac{n}{t}) \varphi(t) dt \geq C \exp(\beta n).$$

En déduire qu'il n'existe pas de distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, \infty[)$  on ait

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \exp(\frac{1}{t}) \varphi(t) dt.$$

On pourra considérer les fonctions  $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$  pour un  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  à support dans  $[\frac{1}{2}, 1]$ .