Produits tensoriels de distributions

Exercice 1 Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Est-ce que $\varphi(y) := \langle T_x, \psi(x,y)\rangle$ définit une fonction de test sur $\mathbb{R}$? Indications:

(a) La fonction φ, est elle à support compact?

(b) Soit (y_n) une suite de réelle qui converge vers y. Montrer que $\psi(\cdot, y_n) \to \psi(\cdot, y)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Qu'en déduire?

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$ et $h_n \to 0$. Montrer que $\frac{\psi(\cdot,y+h_n)-\psi(\cdot,y)}{h_n} \to \partial_x \psi(\cdot, y)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(d) En déduire la différentiabilité de φ et la relation $\varphi^{(j)}(y) = \langle T_x, \partial_y^j \psi(x,y)\rangle$ pour $j = 1$. Justifier $j \geq 2$ par récurrence.

Exercice 2

(a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ déterminer la distribution $\delta_a \otimes \delta_b \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(b) Soit Y la fonction de Heaviside. Déterminer les distributions

$$Y \otimes Y, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(Y \otimes Y\Big), \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(Y \otimes Y\Big), \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(Y \otimes Y\Big).$$

Exercice 3 Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

(a) Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ tel que $T = \mathbb{1} \otimes S$. Calculer $\frac{d}{dx_1} T$.

(b) Soit $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $\ell' = 0$ implique $\ell =$ constant.
Indications: Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Justifier qu'on trouve un $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \theta(x)\, dx = 1$. On pose

$$\varphi(x) = \psi(x) - c\,\theta(x) \qquad \text{où} \quad c = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, dt.$$

Considérer une primitive de φ pour faire intervenir l'hypothèse.

(c) Revenons à $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et supposons, réciproquement à la première question, que $\frac{d}{dx_1} T = 0$.

(i) Montrer que, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$, il existe une constante $S(\psi)$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \qquad \langle T, \varphi \otimes \psi \rangle = S(\psi) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$$

Indication: pour ψ fixé considérer $\langle \ell, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \otimes \psi \rangle$.

(ii) Montrer que $\psi \mapsto S(\psi)$ est une distribution sur $\mathbb{R}^{d-1}$ et que $T = \mathbb{1} \otimes S$ (on pourra faire intervenir une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale 1).

Exercice 4 Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2\,d})$ tels que

$$\mathrm{supp}\,(\theta) \quad \cap \quad (\mathrm{supp}\,(S) \times \mathrm{supp}\,(T)) = \emptyset$$

(a) Montrer qu'il existe un ouvert $V \supseteq \mathrm{supp}\,(S)$ tel que $\mathrm{supp}\,(\theta) \cap (V \times \mathrm{supp}\,(T)) = \emptyset$.

(b) Soit $x \in V$ et $y \in \mathrm{supp}\,(\theta(x, \cdot))$. Montrer $y \notin \mathrm{supp}\,(T)$.

(c) En déduire $\mathrm{supp}\,(S \times T) \subseteq \mathrm{supp}\,(S) \times \mathrm{supp}\,(T)$.

(d) Montrer finalement $\mathrm{supp}\,(S \times T) = \mathrm{supp}\,(S) \times \mathrm{supp}\,(T)$.

Convolution de distributions: prise de contact

Exercice 5 Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Est-ce que $\varphi(y) := \langle T_x, \psi(x+y)\rangle$ définit une fonction de test sur $\mathbb{R}^n$? (Comparer avec le raisonnement de la première question).

Exercice 6 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et T_f, T_g les distributions associés. Déterminer la convolution $T_f * T_g$.

Exercice 7

(a) Justifier que $\delta' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est convolable avec soit-même. Calculer $\delta' * \delta'$.

(b) Soient T et S deux distributions sur $\mathbb{R}$, S étant à support compact; X^n désigne la fonction $x \mapsto x^n$. Exprimer $X^n(T * S)$ en termes de $(X^k T) * (X^j S)$ $(0 \le k, j \le n)$.

(c) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Existe-t-il une distribution E à support compact telle que $E * T = T^{(k)}$?

(d) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $\delta_a * T$.

Exercice 8

(a) Soient S et T deux distributions convolables. Montrer que

$$\mathrm{supp}\,(S * T) \subset \overline{\mathrm{supp}\,(S) + \mathrm{supp}\,(T)}.$$

(b) Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Supposons qu' il exite $M \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{supp}\,(S), \mathrm{supp}\,(T) \subseteq [M, +\infty[$. Démontrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}\,\varphi \subseteq [-N, N]$, alors

$$\mathrm{supp}\ (y \mapsto \langle S_x, \varphi(x+y)\rangle\ ) \quad \subseteq \quad]{-\infty}, N - M].$$

En déduire que S, T sont convolables.

(c) Soit Y la fonction de Heaviside et X^n la fonction $x \mapsto x^n$. Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$Y * Y, \qquad (X\,Y) * (X^2\,Y), \qquad (\sin(\cdot)Y) * \delta''.$$

Exercice 9 Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ tel que P possède une solution élémentaire E

$$P\,E = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha E = \delta_0$$

qui est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.

(a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage de l'origine. Démontrer que $P(\varphi E) - \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P\,T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors on a deja $T = T_f$ pour un $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Indication: $T = \delta * T$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable et $f_n(x) = n^d f(n\,x)$.

(a) En remarquant que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est borné, donner un critère à imposer à la fonction f pour que $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n * \varphi)(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Donner un critère à imposer à la fonction f que pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f_n * T = T$ si $n \to +\infty$.