EXERCICE 1 Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ tel que P possède une solution élémentaire E

$$P\,E = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha E = \delta_0$$

qui est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.

(a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage de l'origine. Démontrer que $P(\varphi E) - \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P\,T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors on a deja $T = T_f$ pour un $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Indication: $T = \delta * T$.

EXERCICE 2 Soit $f : \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable et $f_n(x) = n^d f(n\,x)$.

(a) En remarquant que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est borné, donner un critère à imposer à la fonction f pour que $\lim_{n\to\infty} (f_n * \varphi)(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Donner un critère à imposer à la fonction f que pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on ait $\lim_{n\to\infty} f_n * T = T$ si $n \to +\infty$.

EXERCICE 3 Soit H la fonction de Heaviside et X^n la fonction $x \mapsto x^n$. Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$H * H, \qquad (X\,Y) * (X^2\,H), \qquad (\sin(\cdot)H) * \delta''$$

EXERCICE 4 Décomposer $\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ en une partie $P_\varepsilon(\varphi) + R_\varepsilon(\varphi)$ où$P_\varepsilon(\varphi)$ est une combinaison linéaire de puissances strictement négatives de ε ou de $\log(\varepsilon)$ (les coefficiants ayant droit de dépendre de φ) et tel que $\lim_{\varepsilon\to 0+} R_\varepsilon(\varphi)$ existe. Rappelons qu'on définit ainsi la *partie finie* $\mathrm{pf}(\frac{H}{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0+} R_\varepsilon(\varphi)$. Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\delta' * \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}) \qquad \text{et} \qquad H * \mathrm{pf}(\frac{H}{x})$$

EXERCICE 5 Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ tel que P possède une solution élémentaire E

$$P\,E = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha E = \delta_0$$

qui est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.

(a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage de l'origine. Démontrer que $P(\varphi E) - \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P\,T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors on a deja $T = T_f$ pour un $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Indication: $T = \delta * T$.

Exercice 6 Trouver dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des inverses de convolution des distributions suivantes:

$$T = \delta' - a\delta \qquad T = \sin(x)H \qquad T = \cos(x)H \qquad T = \exp(-x)H$$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable et $f_n(x) = n^d f(n\,x)$.

(a) En remarquant que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est borné, donner un critère à imposer à la fonction f pour que $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n * \varphi)(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Donner un critère à imposer à la fonction f que pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f_n * T = T$ si $n \to +\infty$.