Exercice 1 Montrer que $exp(-x^2)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Qu'en est il avec $f(x) = \sin(x)\exp(-|x|)$?

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout k, la fonction $x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Déduire que $\mathcal{S}$ est stable par transformation de Fourier.

Exercice 3 Soient $f, g \in \mathcal{S}$ telles que $f * g = 0$. A-t-on $f = 0$ ou $g = 0$?

Exercice 4

(a) Soit g_n l'indicatrice de $[-n, n]$, et h l'indicatrice de $[-1, 1]$. Calculer $g_n * h$.

(b) Calculer la transformé de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ pour un $a > 0$.

(c) Considerer la fonction

$$f_n = \frac{1}{x^2\pi^2}\sin(2\pi nx)\sin(2\pi x).$$

Calculer l'inverse de la tranformé de Fourier de f_n (justifier d'abord qu'elle existe!) ainsi que sa tranformé de Fourier.

(d) Que fait $\|f_n\|_{L^1([0,\frac{1}{4}])}$ pour $n \to +\infty$?

(e) En déduire que la transformée de Fourier n'est pas un opérateur surjectif de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$. Indication: argumentez par absurde: si elle était surjective, un résultat abstrait de l'analyse fonctionnelle impliquerait que $\mathcal{F}^{-1}$ serait ...

(f) Montrer que l'image de $\mathcal{F}$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Montrer que la transformé de Fourier est injective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Soit T une distribution tempérée de $\mathbb{R}$. Qu'est-ce qu'on peut dire de T'? Montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 7 Montrer que $\delta^{(k)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pour tout $k \geq 0$. Calculer sa transformation de Fourier.

Exercice 8 Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $S' = 0$. Montrer $x\mathcal{F}S = 0$ et déduire $S = \text{const.}$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. On désigne par $S = T_f$ la distribution associée à la fonction f.

(a) On suppose qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^p} < +\infty.$$

Montrer que S est tempérée.

(b) Montrer que $g(x) = x^m \sin(\exp x)$ definit une distribution tempérée. Qu'en est il auvec $f(x) = x^m \exp(x) \cos(\exp x)$ $(m \geq 1)$?

(c) (i) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = 1$ sur $[-1,1]$, 0 hors de $[-2,2]$, $0 \leq \psi \leq 1$. Pour $r \geq 1$, on pose $\varphi_r(x) = \psi(x/r)$. Montrer que pour tous α, k il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(1+|x|)^k |\, \varphi_r^{(\alpha)}(x)| \leq C(1+r)^k.$$

(ii) On suppose désormais que f est positive, et que S est une distribution tempérée. Montrer que la réciproque à la question *(a)* est vraie.

EXERCICE 10 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ homogène de degré $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e. pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle T, \varphi_t \rangle = t^{-(n+\lambda)} \langle T, \varphi \rangle$$

où $\varphi_t(x) = \varphi(tx)$, pour $t > 0$. Montrer que $\widehat{T}$ est homogène d'un degré que l'on précisera.

EXERCICE 11

(a) Est-ce qu'on peut associer une distribution T à e^t ?

(b) Supposons que T soit une distribution temperée. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ appliquer T à $\tau_a \varphi$ où τ_a denote la translation par a à droite? Quelle type estimation devrait être satisfait pour $\langle T, \tau_a \varphi \rangle$?

(c) La distribution T de la première question, est-elle tempérée?

(d) Soit (a_k) une suite de nombres complexes et $S = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $p \geq 1$ et $C \geq 0$ tel que $|a_k| \leq C(1+k)^p$. Indictaion: Pour démontrer «seulement si» on pourra appliquer S à la fonction $\tau_k \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ satisfait $\varphi(0) = 1$.