— L'équation de la chaleur —

On s'intéresse au problème de valeur initiale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u & = & 0 \\ u(0,x) & = & f(x) \end{cases}$$

dans $\mathbb{R}^{n+1}_+ = [0, \infty[\times \mathbb{R}^n$. Cette équation décrit la diffusion de la température en temps: étant donné la température $f(x)$ au point $x \in \mathbb{R}^n$ pour $t = 0$ on s'intéresse à savoir la température $u(t,x)$ au point x au moment $t \geq 0$.

On note

$$u(t, \hat{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} \, dx$$

la transformation de Fourier *partielle* de u et on fait d'abord un calcul formel pour trouver la bonne formule. Dans la deuxième partie on verra que cette intuition est parfaitement justifiable à posteriori.

(a) Transformer le problème partiellement

(b) Résoudre ce problème pour un $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé (c'est un problème 1-dimensionnel).

(c) Calculer $\mathcal{F}(W_t)(\xi)$ où

$$W_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$$

est appelé le *noyau de la chaleur.*

(d) En déduire une représentation (formelle) de la solution u.

2. On cherche maintenant à vérifier de façon rigoureuse que

$$W(t,x) = \begin{cases} W_t(x) & \text{si} & t > 0 \\ 0 & \text{sinon} & \end{cases}$$

est une solution fondamentale de $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

(e) Pour $t > 0$ fixé, calculer $\int_{\mathbb{R}^n} W_t(x) - W_1(x) \, dx$. En déduire $\int_{\mathbb{R}^n} W_t(x) \, dx$.

(f) Vérifiez que W définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^{n+1}$ (on pourra étudier la fonction $\widetilde{W}(t,x) = (1+t^2)^{-1} W_t(x)$).

(g) On pose $W^{(\varepsilon)}(t,x) = W(t,x)$ si $t > \varepsilon$ et zéro sinon. Montrer que $W^{(\varepsilon)} \to W$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

(h) Pour $t > \varepsilon$, calculer $\big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\big) W(t,x)$

(i) En déduire $\big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\big) W^{(\varepsilon)}$ dans le sens de distributions.

(j) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} W_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$$

pour toute fonction φ uniformément continue.

(k) Conclure que $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x) W(t,x) = \delta_{(0,0)}$.