Exercice 1 Donner un exemple d'un espace vectoriel normé dont la boule d'unité fermé n'est pas compact (avec démonstration bien entendu).

Exercice 2 Soit $E = \{f \in C([0,1], \mathbb{R})\}$ muni de la norme sup, et $m \in E$. On considère $\phi : E \to E$ donne par

$$\phi(f)\,(t) = m(t)f(t)$$

Est-ce que ϕ est un opérateur linéaire sur E? Si oui, est-il borné ? Si oui, calculer sa norme !

Exercice 3

a) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que pour tout $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell_\infty$ on a $(a_n x_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0} \in c_0$.

b) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que pour tout $(x_n)_{n\geq 0} \in c_0$ on a $(a_n x_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell_\infty$.

Exercice 4 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et pour $n \in NN$ soit $0 \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leq 1$ des points "d'échantillonage". On pose

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)}\, f\big(t_k^{(n)}\big)$$

et on interprète Q_n comme une formule de calcul numérique d'une intégrale. Montrer l'équivalence suivante:

a) $Q_n(f) \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$ pour tout $f \in C([0,1])$

b) Il existe une constante $M > 0$ tel que $\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \leq M$ et on a $Q_n(f) \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$ pour tout polynôme f.

Indication: Q_n est une forme linéaire continue (preuve!); les théorèmes de Banach-Steinhaus et de Weierstraß seront utiles.

Une application: Soit E_n le sous-espace de $C([0,1])$ engendré par les fonctions $e_k(t)$, $k = 0 \ldots n-1$, affines par morceaux tel que

$$e_k(t) = 0 \quad \text{si } t < \tfrac{k-1}{n}, \quad e_k(\tfrac{k}{n}) = 1, \quad \text{et} \quad e_k(t) = 0 \quad \text{si } t > \tfrac{k+1}{n}.$$

Soit $f_n = \sum_k f(\frac{k}{n})\, e_k(t) \in E_n$. Expliquer que f_n est l'interpolation de f par une ligne polygonale. On pose $\alpha_k^{(n)} = \int_0^1 e_k(t)\,dt$. Montrer que $Q_n(f) \to \int_0^1 f(t)\,dt$ pour toute fonction continue.

Remarque: si on approche f par des fonctions e_k "plus lisses", par exemple des fonctions polynômiales par morceaux (des 'splines'), on obtient par la même recette des formules d'intégration numérique plus sophistiqués.

DEVOIR À RENDRE LE VENDREDI 26 OCTOBRE.